Geometrie LB Klausur WS17/18 Blatt 14

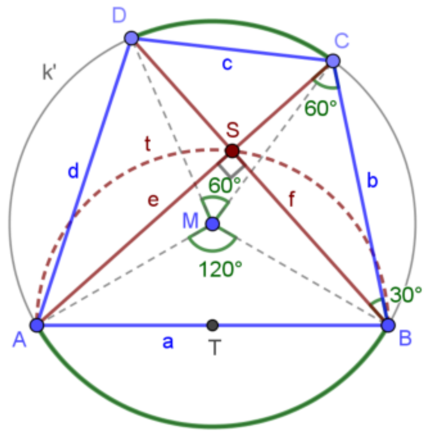
Notiztitel 21.01.2018

Aufgabe 1 (ca. 5 Punkte)

In der euklidischen Ebene seien auf einem Kreis $k(M, r)$ ein Bogen $\widehat{AB}$ mit Mittelpunktswinkel $\angle AMB = 120°$ und auf dem Peripheriekreisbogen k' zu $\widehat{AB}$ ein Bogen $\widehat{CD}$ mit Mittelpunktswinkel $\angle CMD = 60°$ gegeben, siehe Skizze.

a) Zeigen Sie, dass die Diagonalen des Vierecks $ABCD$ auf einander senkrecht stehen.

b) Welche Kurve durchläuft der Diagonalenschnittpunkt S, wenn man den Bogen $\widehat{CD}$ auf k' verschiebt?



Skizze 1

a) Peripheriewinkelsatz

$\measuredangle AMB = 120° \Rightarrow \measuredangle ACB = 60°$; $\measuredangle CMD = 60° \Rightarrow \measuredangle CBD = 30°$ 1 + 1

Winkelsumme im Dreieck $\Delta BCS \Rightarrow e \perp f$ 1

b) ΔABS rechtwinklig $\Rightarrow$ S läuft auf Thaleskreis über $\overline{AB}$. 1

Aufgabe 2 (ca. 7 Punkte)

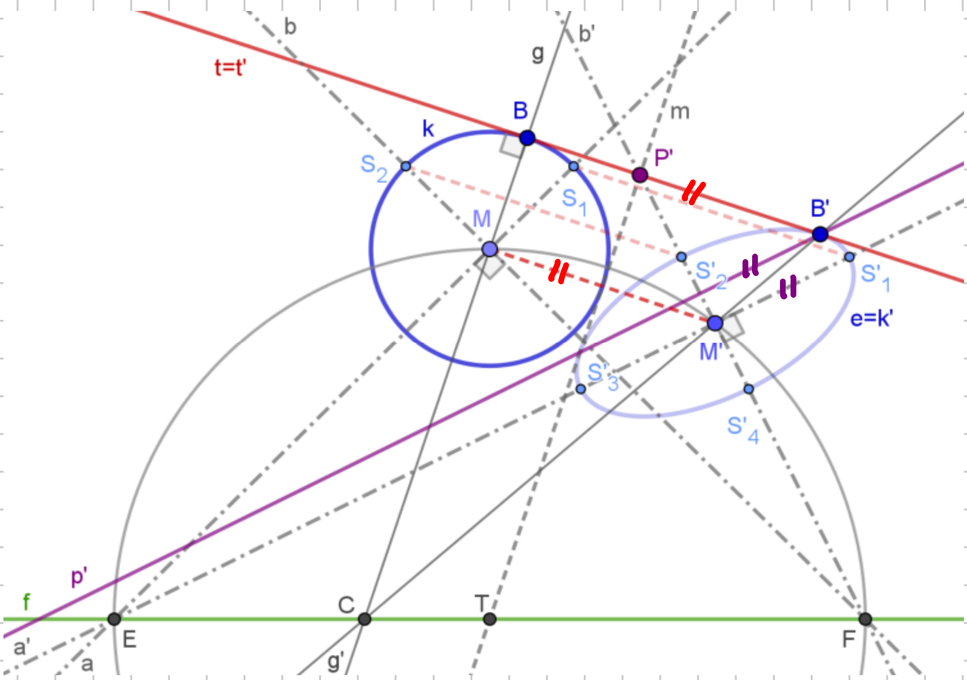
In der projektiv abgeschlossenen euklidischen Ebene $\mathbf{P}^2$ seien eine ebene perspektive Affinität durch Vorgabe ihrer Fixpunktgeraden f und des Punkt-Bildpunktpaars (M, M') sowie eine Gerade $t = t'$ parallel zu MM' gegeben. Ferner sei k ein Kreis um M, dessen Bild eine Ellipse $e = k'$ um M' ist, mit der Geraden $t = t'$ als gemeinsamer Tangente von k und k', vgl. Figur.

a) Konstruieren Sie, die Berührpunkte B und B' von k und k' auf $t = t'$. 2

b) Geben Sie den zu $M'B'$ konjugierten Ellipsendurchmesser von k' an. MM' 1

c) Konstruieren Sie die Hauptachsen (große Halbachse a', kleine Halbachse b') von k'. T 1 2

d) Tragen Sie die Polare p' des Schnittpunkts $P' = t' \cap b'$ ein. $p' \parallel a'$ 1



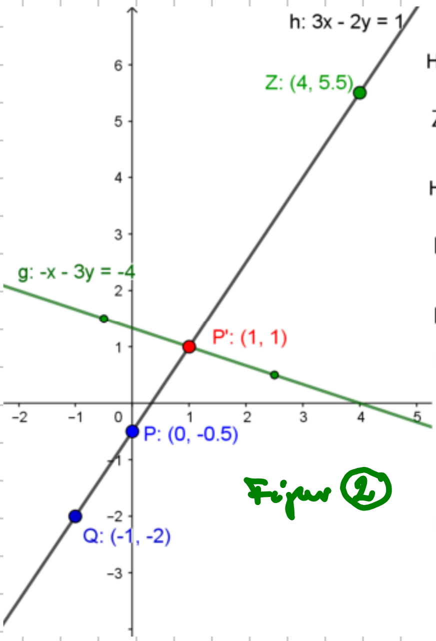
Aufgabe 3 (ca. 7 Punkte)

In der projektiv erweiterten euklidischen Ebene $\mathbf{P}^2$ seien die Gerade $g:\ 4x_0 - x_1 - 3x_2 = 0$ und die Punkte $Z(\vec{z})$ und $P(\vec{p})$ mit den homogenen Koordinaten $\vec{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix}$ und $\vec{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ gegeben.

a) Bestimmen Sie die homogenen Koordinaten der Verbindungsgerade h von Z und P und des Schnittpunkts P' von g und h.

b) Tragen Sie die Punkte Z, P, P' und die Geraden g, h bei Wahl von $x_0 = 0$ als Ferngerade in ein xy-Koordinatensystem ein.

c) Dualisieren Sie die Figur aus b). Was gilt dabei für die Punkte $Q \in h = ZP \setminus \{Z\}$.
Hinweis: Es genügt eine Skizze mit entsprechenden Bezeichnungen.



Homogene Punkt-Koordinaten von

$Z : \vec{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix}$, $P : \vec{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Homogene Geraden-Koordinaten von

$h = ZP : \vec{h} = \vec{z} \times \vec{p} = -8 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ①

$h : \vec{h}'^{\,T} \vec{x} = x_0 - 3\,x_1 + 2\,x_2 = 0$

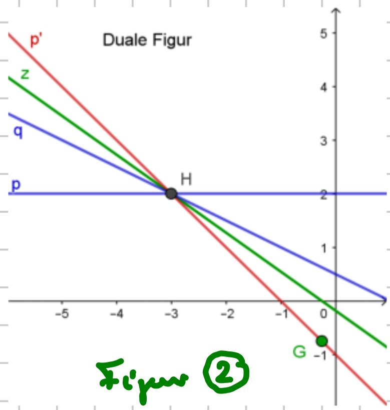
Homogene Geraden-Koordinaten von

$g : 4\,x_0 - x_1 - 3\,x_2 = \vec{g}^{\,T} \vec{x} = 0$ $\longrightarrow$

$\vec{g} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Homogene Punkt-Koordinaten von P' = g∩h:

$\vec{p}\,' = \vec{g} \times \vec{h}\,' = \begin{pmatrix} -11 \\ -11 \\ -11 \end{pmatrix} = -11 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ①



Punkte $Q \in h \setminus \{Z\}$
$\updownarrow$ dual
Gerade q durch H
$q \neq z$. ①

Aufgabe 4 (ca. 6 Punkte)

Zeigen Sie, dass im euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$ durch $U = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 6 & -3 & -2 \\ 2 & 6 & -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{s} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Bewegung mit Achsenrichtung $\vec{s}$ gegeben ist.
Bestimmen Sie die Art der Bewegung und den Cosinus des nichtorientierten Drehwinkels δ.

$$U^T U = \frac{1}{49} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 2 & -3 & 6 \\ 6 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 6 & -3 & -2 \\ 2 & 6 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{49} \cdot \begin{pmatrix} 49 & 0 & 0 \\ 0 & 49 & 0 \\ 0 & 0 & 49 \end{pmatrix} = E \quad ②$$

$$\det U = \frac{1}{7^3} \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 6 & -3 & -2 \\ 2 & 6 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{7^3}(27 - 8 + 6 \cdot 36 + 36 + 36 + 36) = \frac{343}{7^3} = 1$$

$> 0 \Rightarrow = 1$ ①

$\Rightarrow U$ ist eigentliche Bewegungsmatrix .. Drehung ①

$$U \vec{s} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 6 & -3 & -2 \\ 2 & 6 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 14 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} = \vec{s} \text{ .. Drehachsenrichtung} \quad ①$$

$$\cos \delta = \frac{\text{Spur } U - 1}{2} = \frac{\frac{1}{7} \cdot (-3) - 1}{2} = \frac{-10}{14} = \underline{\underline{\frac{-5}{7}}} \quad ①$$

Aufgabe 5 (ca. 8 Punkte)

Im $\mathbb{R}^3$ sei eine C^∞–Kurve c gegeben durch die Parameterdarstellung:

$$c:\ \vec{x}(t)=\begin{pmatrix} t\cos t-\sin t\\ t\sin t+\cos t\\ 2t\end{pmatrix}\ ,\quad t\in\mathbb{R}.$$

a) Zeigen Sie, dass c regulär und insbesondere $|\dot{\vec{x}}(t)|=\sqrt{t^2+4}$ ist.

b) Berechnen Sie die Länge $s=s(t)$ des Kurvenbogens von c von $\vec{x}(0)$ bis $\vec{x}(t)$.

c) Berechnen Sie an der Stelle $t_0=0$ die Krümmung $\kappa(0)$.

d) Zeigen Sie, dass c auf dem Drehhyperboloid: $x^2+y^2-\frac{1}{4}z^2=1$ liegt.

a) $\vec{x}(t)=\begin{pmatrix} t\cos t-\sin t\\ t\sin t+\cos t\\ 2t\end{pmatrix}$; $\dot{\vec{x}}(t)=\underbrace{\begin{pmatrix}-t\sin t\\ t\cos t\\ 2\end{pmatrix}}$; $\ddot{\vec{x}}(t)=\begin{pmatrix}-\sin t-t\cos t\\ \cos t-t\sin t\\ 0\end{pmatrix}$ Abl. 2

$\dot{\vec{x}}(t)^2=t^2+4\neq 0\ \forall t$ oder $\neq\vec{0}$ $\Rightarrow$ c regulär $|\dot{\vec{x}}(t)|=\sqrt{t^2+4}$ 1

b) $s=s(t)=\int_0^t|\dot{\vec{x}}(\tau)|\,d\tau=\int_0^t\sqrt{\tau^2+4}\,d\tau=\frac{t}{2}\sqrt{t^2+4}+2\ln\left(t+\sqrt{t^2+4}\right)-2\ln 2$ 1

c) $\vec{x}(0)=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\dot{\vec{x}}(0)=\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$, $\ddot{\vec{x}}(0)=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $\dot{\vec{x}}(0)\times\ddot{\vec{x}}(0)=\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}$ 1

$\Rightarrow \kappa(0)=\frac{|\dot{\vec{x}}(0)\times\ddot{\vec{x}}(0)|}{|\dot{\vec{x}}(0)|^3}=\frac{2}{2^3}=\frac{1}{4}$ 2

d) $x^2+y^2-\frac{1}{4}z^2=t^2+1-\frac{4t^2}{4}=1$ qed. 1

Aufgabe 6 (ca. 9 Punkte)

Im $\mathbb{R}^3$ sei eine C^∞–Fläche Φ gegeben durch die Parameterdarstellung:

$$\Phi:\ \vec{x}(u,v)=\begin{pmatrix} u\cos v\\ u\sin v\\ 2\ln u\end{pmatrix}\ ,\quad u>0,\ v\in(-\pi,\pi].$$

a) Zeigen Sie, dass Φ regulär ist und ein orthogonales Parameterliniennetz besitzt.

b) Bestimmen Sie den Normaleneinheitsvektor der Fläche Φ.

c) Bestimmen Sie die Oberfläche des Flächenstücks von Φ unterhalb der Ebene $z=0$.

d) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung derjenigen Flächenkurve c von Φ, längs derer der Normalenvektor von Φ senkrecht zur Richtung $(1,0,1)^T$ ist.

a) $\vec{x}(u,v)=\begin{pmatrix}u\cos v\\ u\sin v\\ 2\ln u\end{pmatrix}\Rightarrow \vec{x}_u=\begin{pmatrix}\cos v\\ \sin v\\ 2/u\end{pmatrix}$, $\vec{x}_v=\begin{pmatrix}-u\sin v\\ u\cos v\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow \vec{x}_u\times\vec{x}_v=\begin{pmatrix}-2\cos v\\ -2\sin v\\ u\end{pmatrix}\neq\vec{0}$ 2 1

$g_{12}=\vec{x}_u\cdot\vec{x}_v=0\Rightarrow$ Orth. $(g_{11}=\vec{x}_u^{\,2}=1+\frac{4}{u^2}\ ,\ g_{22}=\vec{x}_v^{\,2}=u^2)$ 1

b) $(\vec{x}_u\times\vec{x}_v)^2=4+u^2=g=g_{11}g_{22}-g_{12}^2\ \Rightarrow\ \vec{n}=\frac{\vec{x}_u\times\vec{x}_v}{\sqrt{g}}$ 1

c) $z=2\ln u\overset{!}{=}0\Leftrightarrow u=1\Rightarrow\Phi$ unterhalb von $z=0\Leftrightarrow 0<u\le 1,\ -\pi<v\le\pi$ 1

$O=\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{g}\,dv\,du=\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{u^2+4}\,dv\,du=2\pi\cdot\int_0^1\sqrt{u^2+4}\,du=$

$=2\pi\left[\frac{u}{2}\sqrt{u^2+4}+2\ln\left(u+\sqrt{u^2+4}\right)\right]_0^1=2\pi\left[\frac{\sqrt{5}}{2}+2\ln(1+\sqrt{5})-2\ln 2\right]$ 1

d) $\begin{pmatrix}-2\cos v\\ -2\sin v\\ u\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=-2\cos v+u\overset{!}{=}0\Leftrightarrow$ $u(t)=t$, $v(t)=\arccos\frac{t}{2}$ 2