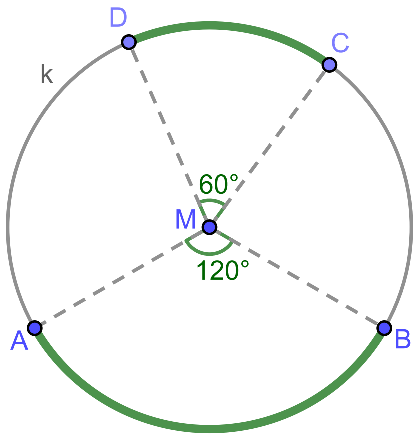
Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Dr. H. Vogel

WS 2017/18
Blatt 14

Geometrie für das Lehramt an beruflichen Schulen
Klausur am 19. Februar 2018
Arbeitszeit 90 Minuten

Aufgabe 1 (ca. 5 Punkte)

In der euklidischen Ebene seien auf einem Kreis $k(M, r)$ ein Bogen $\widehat{AB}$ mit Mittelpunktswinkel $\angle AMB = 120°$ und auf dem Peripheriekreisbogen k' zu $\widehat{AB}$ ein Bogen $\widehat{CD}$ mit Mittelpunktswinkel $\angle CMD = 60°$ gegeben, siehe Skizze.



a) Zeigen Sie, dass die Diagonalen des Vierecks $ABCD$ auf einander senkrecht stehen.

b) Welche Kurve durchläuft der Diagonalenschnittpunkt S, wenn man den Bogen $\widehat{CD}$ auf k' verschiebt?

Aufgabe 2 (ca. 7 Punkte)

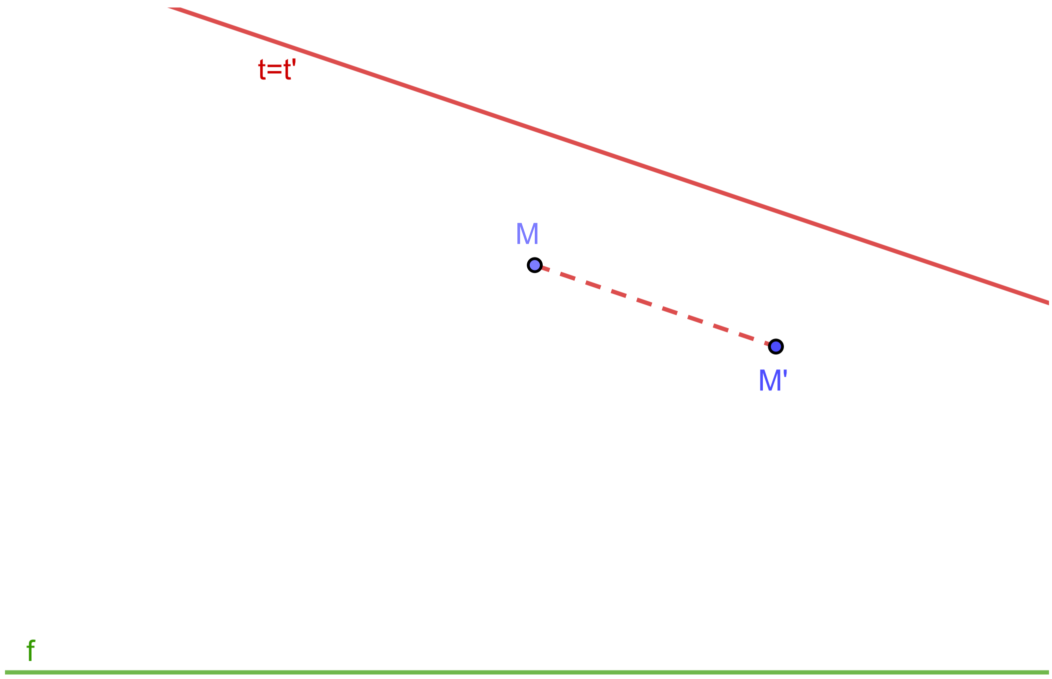
In der projektiv abgeschlossenen euklidischen Ebene $\mathbf{P}^2$ seien eine ebene perspektive Affinität durch Vorgabe ihrer Fixpunktgeraden f und des Punkt-Bildpunktpaars (M, M') sowie eine Gerade $t = t'$ parallel zu MM' gegeben. Ferner sei k ein Kreis um M, dessen Bild eine Ellipse $e = k'$ um M' ist, mit der Geraden $t = t'$ als gemeinsamer Tangente von k und k', vgl. Figur.

a) Konstruieren Sie, die Berührpunkte B und B' von k und k' auf $t = t'$.

b) Geben Sie den zu $M'B'$ konjugierten Ellipsendurchmesser von k' an.

c) Konstruieren Sie die Hauptachsen (große Halbachse a', kleine Halbachse b') von k'.

d) Tragen Sie die Polare p' des Schnittpunkts $P' = t' \cap b'$ ein.



Hinweis: Scheitel und Verlauf von e sind nicht verlangt.

Aufgabe 3 (ca. 7 Punkte)

In der projektiv erweiterten euklidischen Ebene $\mathbf{P}^2$ seien die Gerade $g: 4x_0 - x_1 - 3x_2 = 0$ und die Punkte $Z(\vec{z})$ und $P(\vec{p})$ mit den homogenen Koordinaten $\vec{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix}$ und $\vec{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ gegeben.

a) Bestimmen Sie die homogenen Koordinaten der Verbindungsgerade h von Z und P und des Schnittpunkts P' von g und h.

b) Tragen Sie die Punkte Z, P, P' und die Geraden g, h bei Wahl von $x_0 = 0$ als Ferngerade in ein xy-Koordinatensystem ein.

c) Dualisieren Sie die Figur aus b). Was gilt dabei für die Punkte $Q \in h = ZP \setminus \{Z\}$.
Hinweis: Es genügt eine Skizze mit entsprechenden Bezeichnungen.

Aufgabe 4 (ca. 6 Punkte)

Zeigen Sie, dass im euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$ durch $U = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 6 & -3 & -2 \\ 2 & 6 & -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{s} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Bewegung mit Achsenrichtung $\vec{s}$ gegeben ist.
Bestimmen Sie die Art der Bewegung und den Cosinus des nichtorientierten Drehwinkels δ.

Aufgabe 5 (ca. 8 Punkte)

Im $\mathbb{R}^3$ sei eine C^∞−Kurve c gegeben durch die Parameterdarstellung:

$$c: \; \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t\,\cos t - \sin t \\ t\,\sin t + \cos t \\ 2\,t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

a) Zeigen Sie, dass c regulär und insbesondere $|\dot{\vec{x}}(t)| = \sqrt{t^2+4}$ ist.

b) Berechnen Sie die Länge $s = s(t)$ des Kurvenbogens von c von $\vec{x}(0)$ bis $\vec{x}(t)$.

c) Berechnen Sie an der Stelle $t_0 = 0$ die Krümmung $\kappa(0)$.

d) Zeigen Sie, dass c auf dem Drehhyperboloid: $x^2 + y^2 - \frac{1}{4}z^2 = 1$ liegt.

Aufgabe 6 (ca. 9 Punkte)

Im $\mathbb{R}^3$ sei eine C^∞−Fläche Φ gegeben durch die Parameterdarstellung:

$$\Phi: \; \vec{x}(u,v) = \begin{pmatrix} u\,\cos v \\ u\,\sin v \\ 2\ln u \end{pmatrix}, \quad u > 0, \; v \in (-\pi, \pi].$$

a) Zeigen Sie, dass Φ regulär ist und ein orthogonales Parameterliniennetz besitzt.

b) Bestimmen Sie den Normaleneinheitsvektor der Fläche Φ.

c) Bestimmen Sie die Oberfläche des Flächenstücks von Φ unterhalb der Ebene $z = 0$.

d) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung derjenigen Flächenkurve c von Φ, längs derer der Normalenvektor von Φ senkrecht zur Richtung $(1,0,1)^T$ ist.

Hinweis: $\displaystyle\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C.$