Geometrie LB Blatt 12 Hausaufgaben

Notiztitel 16.12.2014

H27 $\Phi: \vec{x}(u,v) = \begin{pmatrix} (u^2+4)\cos v \\ (u^2+4)\sin v \\ 4u \end{pmatrix}, \quad u \in \mathbb{R},\ v \in [0, 2\pi[$

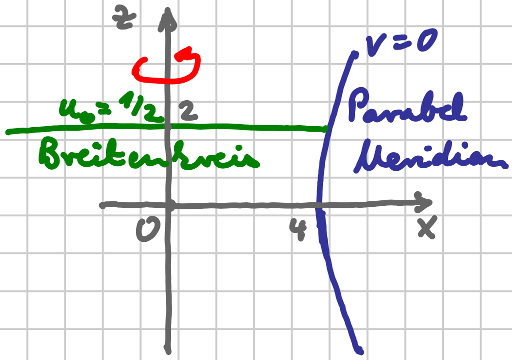
a) u-Linie (speziell $v=0$): $\vec{x}(u,0)$

Parabel

v-Linien ($u=$const): $\vec{x}(u_0,v)$

in Ebene $z=4u_0$ um z-Achse mit

Radius



$\Rightarrow \Phi$ ist Drehfläche einer nach rechts geöffneten Parabel (Meridian) um die z-Achse

b) $\vec{x}_u =$, $\vec{x}_v =$

Beide $\neq \vec{0}$, 3. Komponente liefert Regularität von Φ.

$\vec{x}(u,v) = \vec{x}(\bar{u},\bar{v}) \Leftrightarrow$ (3 Komp.), (1+2. Komp.)

$\Rightarrow$ Im angegebenen Gebiet ist Φ regulär und einfach.

c) $g_{11} = \vec{x}_u^{\,2} =$; $g_{12} = \vec{x}_u \vec{x}_v =$; $g_{22} = \vec{x}_v^{\,2} =$ $\Rightarrow$

$g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 =$ ($\neq 0 \Rightarrow \Phi$ regulär).

d) $z = \pm 8 \Rightarrow u = \pm 2 \Rightarrow$ Oberfläche $O = \int_{-2}^{2}\int_{0}^{2\pi} \sqrt{g}\, dv\, du = \int_{-2}^{2}\int_{0}^{2\pi}$

$= 4\pi \cdot \frac{1}{4}\left[u\left(\sqrt{u^2+4}\right)^3 + 6u\sqrt{u^2+4} + 24\,\mathrm{arsinh}\,\frac{u}{2}\right]_{-2}^{2} =$

$= \pi\left[32\cdot\sqrt{2} + 24\sqrt{2} + 24\,\mathrm{arsinh}\,1\right]\cdot 2 = \pi\left[112\sqrt{2} + 48\,\mathrm{arsinh}\,1\right] \approx 630{,}511$

e) $\vec{x}_u \times \vec{x}_v =$

$\Rightarrow \vec{n}(u,v) = \dfrac{\vec{x}_u \times \vec{x}_v}{|\vec{x}_u \times \vec{x}_v|} =$

$\left(|\vec{x}_u \times \vec{x}_v| = \sqrt{g}\ ! \quad \vec{n} \neq \vec{0} \Rightarrow \Phi \text{ regulär} \right)$

Zusatz: Umriss zur Richtung $(1\ 0\ 1)^T$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (\vec{x}_u \times \vec{x}_v) = (u^2+4)(-4\cos v + 2u) = 0$

$\Leftrightarrow u = 2\cos v$ Flächkurve

f) $\vec{x}^*(u,v) = \begin{pmatrix} f(u) \\ v \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x}^*_u = \begin{pmatrix} f'(u) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{x}^*_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} g^*_{11} = \vec{x}^{*2}_u = \\ g^*_{12} = \vec{x}^*_u \vec{x}^*_v = \\ g^*_{22} = \vec{x}^{*2}_v = \end{cases}$ (*)

Mit $f(u) = 2\,\operatorname{arsinh}\frac{u}{2}$ gilt $f'(u) =$

und $\qquad$ d.h. $\alpha: \Phi \to \Phi^*$ ist lokal winkeltreu

Umgekehrt liefert der Ansatz (*) wie folgt eine Fkt $f(u)$ für α:
$g_{11} = \lambda g^*_{11}$, $g_{12} = \lambda g^*_{12}$, $g_{22} = \lambda g^*_{22}$ mit $\lambda(u,v) \neq 0$, also hier:

$$\begin{aligned} 4(u^2+4) &= \lambda \cdot f'^2 \\ 0 &= \lambda \cdot 0 \\ (u^2+4)^2 &= \lambda \cdot 1 \end{aligned} \;\underset{\lambda(u,v)=(u^2+4)^2}{\Rightarrow}\; f' = \frac{\pm 2}{\sqrt{u^2+4}} \;\Rightarrow\; \underbrace{f(u) = \pm 2 \cdot \operatorname{arsinh}\frac{u}{2}}_{\text{Stammfunktion}} + \text{const}$$

H28 $\Phi: \vec{x}(u,v) = \begin{pmatrix} \cos u \cos v \\ \cos u \sin v \\ \sin u \end{pmatrix}$, $\bar\Phi: \bar{\vec{x}}(u,v) = \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ \sin u \end{pmatrix}$, $\Phi^*: \vec{x}^*(u,v) = \begin{pmatrix} v \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix}$

α, β sind flächentreu $\Leftrightarrow$ $g(u,v) = \bar g(u,v) = g^*(u,v) \quad \forall (u,v) \in G$

Berechnung der metrischen Fundamentalgrößen von Φ, $\bar\Phi$ und Φ^*:

$\vec{x}_u =$ $\qquad$, $\vec{x}_v =$ $\qquad \Rightarrow$ $g_{11} = \vec{x}_u^{\,2} =$, $g_{12} = \vec{x}_u \vec{x}_v =$,
$g_{22} = \vec{x}_v^{\,2} =$ $\qquad \Rightarrow g = g_{11} g_{22} - g_{12}^2 =$

$\bar{\vec{x}}_u =$ $\qquad$, $\bar{\vec{x}}_v =$ $\qquad \Rightarrow$ $\bar g_{11} = \bar{\vec{x}}_u^{\,2} =$, $\bar g_{12} = \bar{\vec{x}}_u \bar{\vec{x}}_v =$
$\bar g_{22} = \bar{\vec{x}}_v^{\,2} =$ $\qquad \Rightarrow \bar g = \bar g_{11} \bar g_{22} - \bar g_{12}^2 =$

$\vec{x}^*_u =$ $\qquad$, $\vec{x}^*_v =$ $\qquad \Rightarrow$ $g^*_{11} = \vec{x}^{*2}_u =$, $g^*_{12} = \vec{x}^*_u \vec{x}^*_v =$
$g^*_{22} = \vec{x}^{*2}_v =$ $\qquad \Rightarrow g^* = g^*_{11} g^*_{22} - g^{*2}_{12} =$

$\Rightarrow \alpha$ und β sind flächentreu, da $g = \bar g = g^* = \cos^2 u$.

γ ist sogar isometrisch, da $\bar g_{ij}(u,v) = g^*_{ij}(u,v)$ (Zylinderabwicklung)

α und β sind weder isometrisch noch konform (winkeltreu)

Zusatz: Die Abbildung α ist konstruktiv eine Projektion der Sphäre (Kugel) senkrecht zur z-Achse auf den Drehzylinder um die z-Achse, da die Verbindungsgerade von $\vec{x}(u,v)$ und $\bar{\vec{x}}(u,v)$ gegeben ist durch

$$\vec{y} = \bar{\vec{x}}(u,v) + \lambda[\vec{x}(u,v) - \bar{\vec{x}}(u,v)] = \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ \sin u \end{pmatrix} + \lambda(\cos u - 1)\begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 0 \end{pmatrix} \quad \left[\perp \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$

also für $\lambda = \frac{1}{1-\cos u}$ die z-Achse senkrecht schneidet.