

T28. $\vec{x}(u,v) = \begin{pmatrix} u \cos v \\ u \sin v \\ v - u \end{pmatrix}, (u,v) \in \mathbb{R}^2$

a) u-linie ($v=v_0 = \text{const}$): $\vec{x}(u, v_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} \cos v_0 \\ \sin v_0 \\ -1 \end{pmatrix}$ Gerade durch $(0,0,v_0)$ auf der z-Achse
Aufpunkt *Richtung*

v-linie ($u=u_0 = \text{const}$): $\vec{x}(u_0, v) = \begin{pmatrix} u_0 \cos v \\ u_0 \sin v \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -u_0 \end{pmatrix}$ Schraublinie um z-Achse
 Schraubradius u_0
 Ganghöhe $h=2\pi$.
Verschiebung

$\Rightarrow \phi$ ist Schraubfläche mit geradlinigen Erzeugenden.

b) $\vec{x}(u,v)$ regulär $\Leftrightarrow \vec{x}_u(u,v)$ und $\vec{x}_v(u,v)$ sind linear unabhängig
 $\Leftrightarrow \vec{x}_u \times \vec{x}_v \neq \vec{0} \Leftrightarrow (\vec{x}_u \times \vec{x}_v)^2 \neq 0$.

$\vec{x}_u = \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{x}_v = \begin{pmatrix} -u \sin v \\ u \cos v \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x}_u \times \vec{x}_v = \begin{pmatrix} \sin v + u \cos v \\ -\cos v + u \sin v \\ u \end{pmatrix}$
spannen Tangentenebene auf *Richtung der Normalen*

1. Weg: $\lambda \vec{x}_u + \mu \vec{x}_v = \vec{0} \xrightarrow{3. \text{Kompl.}} \mu = \lambda \wedge \begin{pmatrix} \cos v & -\sin v \\ \sin v & \cos v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = \mu = 0$
1. und 2. Kompl. $\det(\dots) = 1 \neq 0$

2. Weg: $\vec{x}_u \times \vec{x}_v \neq \vec{0}$, da 3. Kompl. = 0 $\Leftrightarrow u=0$ aber $\sin v$ und $\cos v$ keine gemeinsamen Nullstelle haben.

3. Weg: $(\vec{x}_u \times \vec{x}_v)^2 = \vec{x}_u^2 \cdot \vec{x}_v^2 - (\vec{x}_u \cdot \vec{x}_v)^2 = g_{11} g_{22} - g_{12}^2 = \det \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix}$

Lagrange Identität.
 metrische Fundamentalsgrößen
 $\left. \begin{matrix} g_{11} = \vec{x}_u^2 = 2 \\ g_{12} = \vec{x}_u \cdot \vec{x}_v = -1 \\ g_{22} = \vec{x}_v^2 = u^2 + 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{matrix} = 2(u^2 + 1) - 1 = \\ = 2u^2 + 1 \neq 0 \end{matrix}$

$\Rightarrow \vec{n}(u,v) = \frac{\vec{x}_u \times \vec{x}_v}{|\vec{x}_u \times \vec{x}_v|} = \frac{1}{\sqrt{2u^2 + 1}} \begin{pmatrix} \sin v + u \cos v \\ -\cos v + u \sin v \\ u \end{pmatrix}$ *Normaleneinheitsvektor.*

c) $\vec{a} = a^1 \vec{x}_u + a^2 \vec{x}_v \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = (a^1 \ a^2) \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \end{pmatrix} = (a^1 \ a^2) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & u^2 + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \end{pmatrix}$
regelt Metrik in der Tangentenebene

d) \vec{x}_u und \vec{x}_v sind Tangentialvektoren an Parameterlinien im Punkt $\vec{x}(u_0, v_0)$

$$\Rightarrow \cos \angle(\vec{x}_u, \vec{x}_v) = \frac{\vec{x}_u \cdot \vec{x}_v}{|\vec{x}_u| \cdot |\vec{x}_v|} = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}} \sqrt{g_{22}}} = \frac{-1}{\sqrt{2} \sqrt{1+u_0^2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \cos 135^\circ$$

$\Leftrightarrow \underline{u_0 = 0}$ $\Leftrightarrow \vec{x}(0, v) = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$ schraubachse! \uparrow geradlinig Erzeugende

e) Flächenkurve $\vec{y}(t) := \vec{x}(u(t), v(t)) \Rightarrow \dot{\vec{y}}(t) = \vec{x}_u \cdot \dot{u} + \vec{x}_v \cdot \dot{v}$
 Kettenregel Tangente an Flächenkurve

Tangente an u-Linie ist $\vec{x}_u \Rightarrow \angle(\dot{\vec{y}}(t), \vec{x}_u) = 90^\circ$ im Punkt $(u(t), v(t))$

$$\Leftrightarrow \underline{0} = \dot{\vec{y}}(t) \cdot \vec{x}_u = (\vec{x}_u \cdot \dot{u} + \vec{x}_v \cdot \dot{v}) \cdot \vec{x}_u = g_{11} \dot{u} + g_{12} \dot{v} = \underline{2\dot{u} - \dot{v}}$$

Wähle o.E. $\dot{u} = 1$ (d.h. $u(t) = t + c_1$) $\Rightarrow \dot{v} = 2$ (d.h. $v(t) = 2t + c_2$)

$\Leftrightarrow u(t) = t + c_1$ und $v(t) = 2t + c_2$ mit Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \underline{\vec{y}(t) = \vec{x}(t + c_1, 2t + c_2)}$ (Orthogonaltrajektorie der geradlinigen Erzeugenden)

f) $\vec{x}(u, v)$ mit $(u, v) \in \mathcal{U} =]0, 2[\times]0, \pi[$ ist einfall $\Leftrightarrow \vec{x}(u, v)$ injektiv

Quadratsumme der 1. und 2. Komp.

$$\vec{x}(u_1, v_1) = \vec{x}(u_2, v_2) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u_1 \cos v_1 \\ u_1 \sin v_1 \\ v_1 - u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 \cos v_2 \\ u_2 \sin v_2 \\ v_2 - u_2 \end{pmatrix} \left. \begin{array}{l} \Rightarrow u_1^2 = u_2^2 \Rightarrow u_1 = u_2 \\ \Rightarrow v_1 = v_2 \quad \text{ged.} \end{array} \right\}$$

$$A(\Phi) = \iint_{\mathcal{U}} |\vec{x}_u \times \vec{x}_v| \, du \, dv = \iint_{\mathcal{U}} \sqrt{\det(g_{ij})} \, du \, dv = \int_{v=0}^{\pi} \int_{u=0}^2 \sqrt{1+2u^2} \, du \, dv =$$

$$= \int_{u=0}^2 \left(\int_{v=0}^{\pi} \sqrt{1+2u^2} \, dv \right) du = \int_0^2 \pi \cdot \sqrt{1+2u^2} \, du =$$

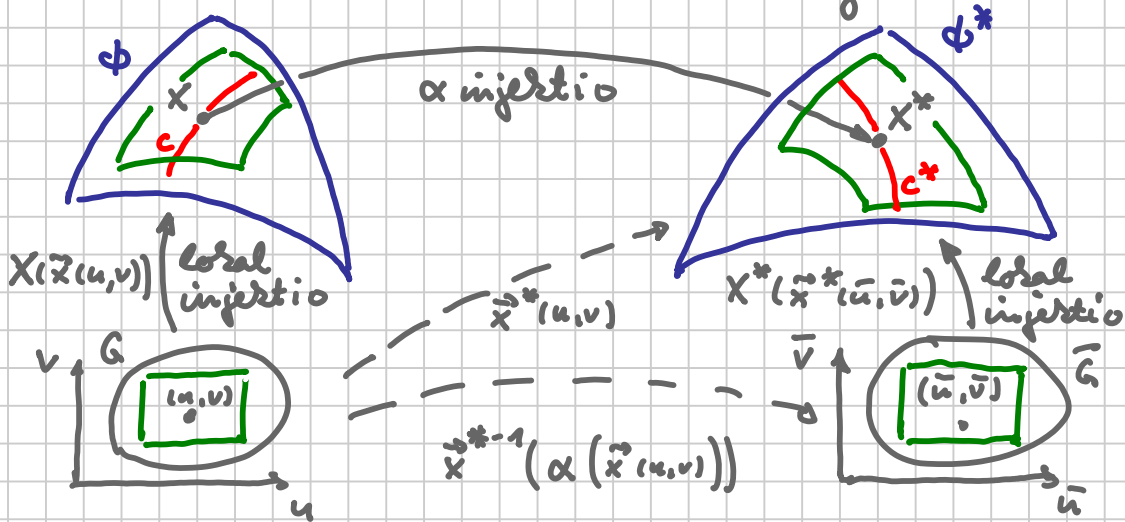
Fubini

$$= \pi \cdot \left(\frac{1}{2} u \sqrt{1+2u^2} + \frac{1}{4} \sqrt{2} \operatorname{arsinh}(\sqrt{2}u) \right) \Big|_{u=0}^2 = \pi \left(3 + \frac{1}{4} \sqrt{2} \operatorname{arsinh}(\sqrt{2}) \right)$$

Rechteckbereich!

Anmerkung: Φ hat für $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\times \mathbb{R}$ längs $u = \frac{\pi}{2}$ eine Selbstdurchdringung (scharfe Kante) \rightarrow Korkenzieher!

Zur lokalen Flächenabbildung



$\bar{x}^{*-1}(\alpha(\bar{x}(u,v)))$ bildet lokal G injektiv auf \bar{G} ab und gibt die Möglichkeit für einen Parameterwechsel für Φ^* : $\bar{x}^*(u,v) = \alpha(\bar{x}(u,v))$

Damit sind Φ und Φ^* genau die durch die Flächenabbildung α aufeinander bezogenen Punkte X und X^* auf dieselben Parameter (u,v) bezogen.

Seien nun o.E. Φ und Φ^* auf gleiche Parameter bezogen.

$$g_{11} = \vec{x}_u^2, g_{12} = \vec{x}_u \vec{x}_v, g_{22} = \vec{x}_v^2 \quad \text{und} \quad g_{11}^* = \vec{x}_u^{*2}, g_{12}^* = \vec{x}_u^* \vec{x}_v^*, g_{22}^* = \vec{x}_v^{*2}$$

Dann gilt:

$$1) \quad g_{ij}(u,v) = g_{ij}^*(u,v) \quad \left(s = \int \sqrt{g_{11} \dot{u}^2 + 2g_{12} \dot{u} \dot{v} + g_{22} \dot{v}^2} dt \right) \Rightarrow \alpha \text{ ist isometrisch}$$

○ Bogenlänge von c und c^* gleich!

$$2) \quad g_{ij}(u,v) = \lambda(u,v) g_{ij}^*(u,v) \quad \left(\cos \angle(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{g_{12} \dot{u} \dot{\bar{u}} + g_{12} \dot{u} \dot{\bar{v}} + g_{22} \dot{v} \dot{\bar{v}}}{\sqrt{g_{11} \dot{u}^2 + 2g_{12} \dot{u} \dot{v} + g_{22} \dot{v}^2} \sqrt{g_{11} \dot{\bar{u}}^2 + 2g_{12} \dot{\bar{u}} \dot{\bar{v}} + g_{22} \dot{\bar{v}}^2}} \right)$$

Winkel zweier Flächenkurven $\vec{x}(t) = \vec{x}(u(t), v(t)) \Rightarrow \alpha$ ist winkeltreu (konform)
 c und \bar{c} bzw. c^* und \bar{c}^* gleich! $\vec{y}(t) = \vec{y}(\bar{u}(t), \bar{v}(t))$

$$3) \quad g(u,v) = g^*(u,v) \quad \left(\sigma = \iint_G \sqrt{g} du dv \right) \Rightarrow \alpha \text{ ist flächentreu}$$

○ Oberfläche von $\Phi|_c$ und $\Phi^*|_{c^*}$ gleich!

Die Umkehrung dieser Aussagen gelten ebenfalls!
 Zum Beweis sind jedoch weitere Überlegungen nötig!

T29. Raumkurve $c: \vec{y}(s), s \in I$ (s Bogenlänge von c , d.h. $|\vec{y}'(s)|=1$)

Tangentenfläche $\phi: \vec{x}(s,t) = \vec{y}(s) + t \vec{y}'(s), s \in I, t \in J \subset \mathbb{R}$

a) ϕ regulär $\Leftrightarrow \{\vec{x}_s, \vec{x}_t\}$ lin. unabhängig $\Leftrightarrow \vec{x}_s \times \vec{x}_t \neq \vec{0}$

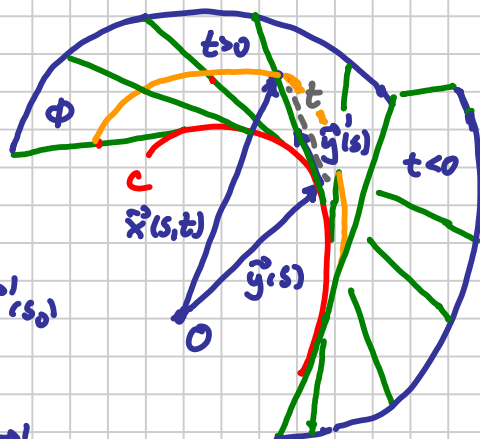
$$\vec{x}_s = \vec{y}' + t \vec{y}'', \vec{x}_t = \vec{y}' \Rightarrow \vec{x}_s \times \vec{x}_t = t \cdot (\vec{y}'' \times \vec{y}') = \vec{0} \Leftrightarrow t=0$$

(Voraussetzung c W-punktfrei $\Rightarrow \{\vec{y}', \vec{y}''\}$ lin. unabh. $\Rightarrow \vec{y}' \times \vec{y}'' \neq \vec{0}$)

$\Rightarrow \phi$ regulär für $J \subset \mathbb{R}^+$ oder $J \subset \mathbb{R}^-$

Für $t=0$ (d.h. die Punkte von c) ist die Tangentenebene von ϕ nicht er-

klärt. c heißt Gradlinie von ϕ



b) t -Linien ($s = \text{const}$) $\vec{x}(s_0, t) = \vec{y}(s_0) + t \vec{y}'(s_0)$

Tangenten von c , Erzeugende von ϕ

s -Linien ($t = \text{const}$) $\vec{x}(s, t_0) = \vec{y}(s) + t_0 \vec{y}'(s)$

Wegen $|\vec{y}'(s)|=1 \forall s$ sind s -Linien Linien konstanter, auf den Tangenten von c abgetragenen Abstands.

c) (nicht normierter) Normalenvektor von $\phi: \vec{n}(s,t) = \vec{x}_s \times \vec{x}_t = t \cdot (\vec{y}'' \times \vec{y}')$

\Rightarrow längs der Erzeugenden $s=s_0 = \text{const}$ von ϕ ändert sich die Richtung des Normalenvektors \vec{n} nicht, nur die Länge von \vec{n} .

Außerdem enthält jede Tangentenebene von ϕ längs der Erzeugenden $s=s_0 = \text{const}$ diese Erzeugende $\vec{x}(s_0, t) \Rightarrow$ Behauptung.

$$d) g_{11} = \vec{x}_s^2 = (\vec{y}' + t \vec{y}'')^2 = \underbrace{\vec{y}'^2}_{=1} + 2t \underbrace{\vec{y}' \cdot \vec{y}''}_{=0} + t^2 \vec{y}''^2 = 1 + t^2 \vec{y}''^2 = 1 + t^2 \kappa^2(s)$$

$$(\vec{y}'(s))^2 = 1 \quad \forall s \xrightarrow{\frac{d}{ds}} \Rightarrow 2 \vec{y}'(s) \cdot \vec{y}''(s) = 0 \quad \forall s \quad \kappa(s) = |\vec{y}''(s)|$$

$$g_{12} = \vec{x}_s \cdot \vec{x}_t = (\vec{y}' + t \vec{y}'') \cdot \vec{y}' = \underbrace{\vec{y}'^2}_{=1} + t \underbrace{\vec{y}'' \cdot \vec{y}'}_{=0} = 1$$

$$g_{22} = \vec{x}_t^2 = \vec{y}'^2 = 1 \quad (\Rightarrow g = g_{11} g_{22} - g_{12}^2 = t^2 \kappa^2(s) \neq 0 \text{ für } t \neq 0)$$

$\kappa(s) > 0$ bei Raumkurven

e) Nach Vorlesung ist die Abbildung zweier Flächen aufeinander (mittels Zuordnung durch gleiche Parameter) isometrisch,

wenn in zugeordneten Punkten die metrischen Fundamentalfunktionen übereinstimmen.

aus d folgt: Zwei Tangentenflächen Φ_1, Φ_2 , deren Grenzlinien $c_1: \vec{y}_1(s)$ und $c_2: \vec{y}_2(s)$ (jeweils auf ihre Bogenlänge s bezogen) in zugeordneten Punkten die selbe Krümmung haben, sind zueinander isometrisch.

Nach dem Hauptsatz der Kurventheorie gibt es bei auf Bewegungen genau eine ebene Kurve \tilde{c} mit der Krümmung $\kappa(s)$ von c . Die ebene Tangentenfläche $\tilde{\Phi}$ von \tilde{c} ist (nach d) isometrisch zur Tangentenfläche Φ von c .

Parameterdarstellung von \tilde{c} in der $x-y$ -Ebene:

$$E: \vec{y}(s) = \left(\int_0^s \cos\left(\int_0^v \kappa(u) du\right) dv, \int_0^s \sin\left(\int_0^v \kappa(u) du\right) dv, 0 \right)^T, s \in I$$

Beweis durch Nachrechnen:

Beachtet man $\frac{d}{ds} \int_0^s f(v) dv = f(s)$, so erhält man

$$\vec{y}'(s) = \frac{d}{ds} \vec{y}(s) = \left(\cos\left(\int_0^s \kappa(u) du\right), \sin\left(\int_0^s \kappa(u) du\right), 0 \right)^T \text{ und } |\vec{y}'(s)| = 1$$

\Rightarrow Bogenlänge s von c ist auch Bogenlänge von \tilde{c} !

$$\vec{y}''(s) = \left(-\kappa(s) \sin\left(\int_0^s \kappa(u) du\right), \kappa(s) \cos\left(\int_0^s \kappa(u) du\right), 0 \right)^T \Rightarrow \tilde{\kappa}(s) = |\vec{y}''(s)| = \kappa(s)$$

Beispiel: Die Tangentenflächen der Schraublinien c_a :

$$\vec{y}_a(s) = \begin{pmatrix} \frac{\kappa}{a^2} \cos(as) \\ \frac{\kappa}{a^2} \sin(as) \\ \frac{\sqrt{a^2 - \kappa^2}}{a} s \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{y}_a'(s) = \begin{pmatrix} -\frac{\kappa}{a} \sin(as) \\ \frac{\kappa}{a} \cos(as) \\ \frac{\sqrt{a^2 - \kappa^2}}{a} \end{pmatrix}, \vec{y}_a''(s) = \begin{pmatrix} -\kappa \cos(as) \\ -\kappa \sin(as) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow |\vec{y}_a''| = \kappa = \text{const}$, sind für alle $a \geq \kappa$ zueinander isometrisch bzw alle isometrisch zur ebenen Tangentenfläche des Kreises c_κ mit Radius $\frac{\kappa}{\kappa}$, vgl. Figur Tangentenfläche. c.d.g.!