Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Dr. H. Vogel

WS 2021/22
Blatt 7

Geometrie für das Lehramt an beruflichen Schulen

Tutoraufgaben:

T17. Der folgende Satz sei mit S bezeichnet:

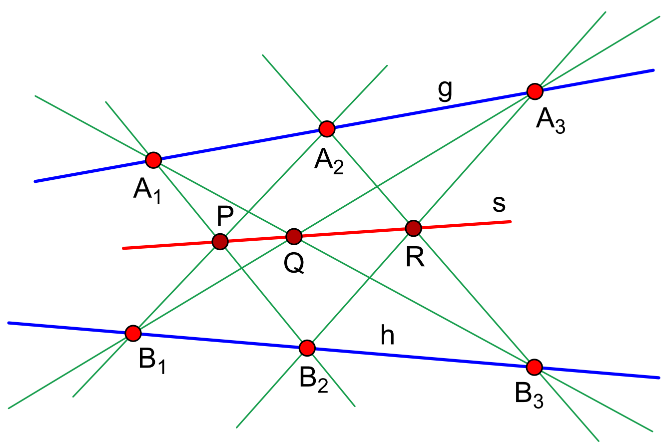
Seien g, h zwei verschiedene Geraden in einer projektiv erweiterten euklidischen Ebene P^2 und $Z \in P^2 \backslash (g \cup h)$. Dann gilt:
Vier paarweise verschiedene Geraden z_1, z_2, z_3, z_4 durch Z schneiden die beiden Geraden g und h in je vier Punkten G_1, G_2, G_3, G_4 bzw. H_1, H_2, H_3, H_4 mit der Eigenschaft:

$$\mathrm{DV}(G_1, G_2, G_3, G_4) = \mathrm{DV}(H_1, H_2, H_3, H_4)$$

a) Dualisieren Sie den Satz S und bezeichnen Sie den dualen Satz mit S'.

b) Begründen Sie die Gültigkeit der beiden Sätze S und S'.

T18. Dualisieren Sie die Aussage des Axioms von Pappos in der projektiven Ebene P^2.



T19. Kreise, Ellipsen und Hyperbeln sind zueinander projektiv.

a) Bestimmen Sie eine Projektivität $\vec{y} = U\vec{x}$ des P^2, welche die Gerade y=mx+b auf die Ferngerade $y_0 = 0$ abbildet.

b) Bestimmen Sie das Bild des Kreises $x^2 + y^2 = 1$ unter dieser Abbildung speziell für $m = 0$. Was ergibt sich für $b = 0, b = 1$ bzw. $b = 2$?

Hausaufgaben:

H15. Gegeben sei ein Kegelschnitt k in affinen $xy-$Koordinaten $x^2 - 4xy + ay^2 + 2y = 1$ mit konstantem $a \in \mathbb{R}$.

a) Geben Sie eine Gleichung von k in homogenen Koordinaten an und stellen Sie diese in der Form $\vec{x}^T A \vec{x} = 0$ mit $A^T = A$ dar.

b) Bringen Sie diese Gleichung durch quadratische Ergänzung auf projektive Normalform. Was gilt im Fall $a = 3$?

c) Geben Sie für $a = 2$ die zugehörige projektive Abbildung $\vec{x} = U\vec{y}$ an und berechnen Sie $U^T AU$.

H16. Die Aussage des Satzes von Desargues in Aufgabe **H 8b)** für den projektiven Raum P^3 gilt auch in der projektiven Ebene P^2.

a) Dualisieren Sie den Satz von Desargues in der projektiven Ebene P^2.

b) Welcher Zusammenhang besteht im P^2 zwischen dem Satz von Desargues und dem zu ihm dualen Satz ?

c) Wie kann man die beiden Sätze in P^2 in einem Satz zusammenfassen ?

H17. Dualisieren Sie die Aussage des Satzes von Desargues im projektiven Raum P^3, vgl. **H 8**.
Hinweis: Beginnen Sie die duale Figur mit einem Dreieck in einer Ebene und wählen Sie dann einen Punkt oberhalb und einen Punkt unterhalb der Dreiecksebene.