Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Dr. H. Vogel

Geometrie für das Lehramt an beruflichen Schulen

Euklidische Strenge

Tutoraufgaben:

T4. Euklid beweist in § 13 des ersten Buches der Elemente den Satz: "Wenn eine gerade Linie, auf eine gerade Linie gestellt, Winkel bildet, dann muß sie entweder zwei Rechte oder solche, die zusammen zwei Rechten gleich sind, bilden." Wie kann man damit den Satz beweisen, den Euklid in § 15 formuliert:

"Zwei gerade Linien bilden, wenn Sie einander schneiden, Scheitelwinkel, die einander gleich sind."

T5. Bestimmen Sie die kleinste affine Ebene. Wieviele Punkte besitzt diese?

T6. **entfällt coronabedingt**
Gegeben sei eine affine Ebene $(E, \mathfrak{G})$ mit endlich vielen Punkten $(|E| \in \mathbb{N})$.
Zeigen Sie: Dann gibt es eine natürliche Zahl $q \in \mathbb{N}$ so, dass gilt:

a) Auf jeder Geraden liegen genau q Punkte und zu einer Geraden gibt es genau q zueinander parallelliegende Geraden.

b) Durch jeden Punkt gehen genau $q + 1$ Geraden.

c) Die Punktmenge E enthält genau q^2 Punkte.

d) Die Geradenmenge $\mathfrak{G}$ enthält genau $q^2 + q$ Geraden.

Hausaufgaben:

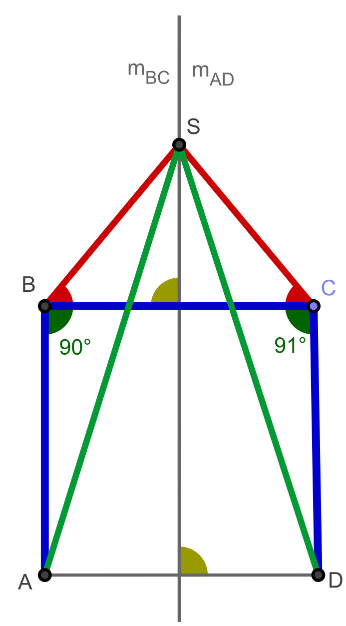
H3. **Wo steckt der Fehler ?**

Gegeben sei das Viereck $ABCD$ mit gleichlangen Seiten $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$ und den Winkeln $\sphericalangle ABC = 90°$ und $\sphericalangle BCD = 91°$ (vgl. Figur):

Sei $S = m_{BC} \cap m_{AD}$ der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten m_{BC} und m_{AD} über den Strecken $\overline{BC}$ und $\overline{AD}$.

Dann gilt aus Symmetriegründen:
$\overline{BS} = \overline{CS}$, $\overline{AS} = \overline{DS}$ $\Rightarrow$ Die Dreiecke ABS und DCS sind kongruent und $\sphericalangle ABS = \sphericalangle DCS$.
Da das Dreieck BCS gleichschenklig ist, gilt:
$\sphericalangle CBS = \sphericalangle BCS$, woraus $\sphericalangle ABC = \sphericalangle DCB$ folgt,

d.h. **90°=91°** !



Hinweis: Obige Argumentation gilt offenbar unabhängig vom Winkel $\sphericalangle BCD \neq 90°$.

H4. **entfällt coronabedingt**

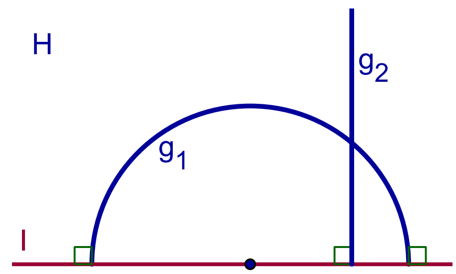
POINCARE-sches Halbebenenmodell der hyperbolischen Ebene

In der reellen Koordinatenebene $\mathbb{R}^2$ seien:

$l := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \, y = 0\}$ die x-Achse,

$H := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \, y > 0\}$ die obere Halbebene,

$\mathfrak{K}$ die Menge aller Kreise und Geraden von $\mathbb{R}^2$, die l orthogonal schneiden, und $\mathfrak{G} := \{k \cap H | \, k \in \mathfrak{K}\}$.



a) Zeigen Sie, dass die Punktmenge H zusammen mit der Geradenmenge $\mathfrak{G}$ ein Inzidenzraum ist.

b) Begründen Sie, warum $(H, \mathfrak{G})$ keine affine Ebene ist.