

## Geometrie für das Lehramt an beruflichen Schulen

### Tutoraufgaben:

**T26.** Auf welcher Kurve liegen die Mittelpunkte der Krümmungskreise ("Evolute") der durch  $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t + t \sin t \\ \sin t - t \cos t \end{pmatrix}$ ,  $t > 0$  gegebenen Kurve

**T27.** Durch die Parameterdarstellung  $\Phi \subset \mathbb{R}^3 : \vec{x}(u, v) = \begin{pmatrix} u \cos v \\ u \sin v \\ \sqrt{2}u \end{pmatrix}$ ,  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$  ist eine  $C^\omega$ -Fläche im Raum gegeben.

- Beschreiben Sie die Parameterlinien von  $\Phi$  und zeigen Sie, dass  $\Phi$  eine Drehfläche ist.
- Zeigen Sie, dass  $\vec{x}(u, v)$  mit  $(u, v) \in G := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u > 0\}$  regulär ist.  
Geben Sie einen Parameterbereich  $\tilde{G}$  an, so dass  $\Phi$  sogar einfach ist.

Durch  $(u(t), v(t)) = (e^t, t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  ist eine Flächenkurve  $c \subset \Phi : \vec{x}(u(t), v(t))$ ,  $t \in \mathbb{R}$  gegeben.

- Zeigen Sie dass  $c$  eine reguläre Flächenkurve ist.
- Berechnen Sie die Bogenlänge  $s(t)$  von  $c$ .
- Bestimmen Sie den Winkel von  $c$  zu den  $u$ -Linien von  $\Phi$ .

### Hausaufgaben:

**H25.** Die *logarithmische Spirale* ist gegeben durch Polarkoordinaten  $r(\varphi) = a e^{b\varphi}$ ,  $\varphi \in \mathbb{R}$ ,  $a, b > 0$ .

- Berechnen Sie die Bogenlänge  $s(\varphi)$  von  $c$  mit der Anfangsbedingung  $s(0) = 0$ .
- Zeigen Sie, dass die Kurve  $c$  die Geraden durch  $O = (0, 0)$  unter konstantem Winkel schneidet.
- Zeigen Sie, dass die Evolute von  $c$  wieder eine logarithmische Spirale ist.

**H26.** Ein Torus entsteht im dreidimensionalen Raum  $\mathbb{R}^3$  als Drehfläche eines Kreises  $k(M, r)$ ,  $r > 0$  in der  $xz$ -Ebene um die  $z$ -Achse.  
 Wähle  $M = (a, 0, 0)$  auf der  $x$ -Achse mit  $a > 0$ , dann durchläuft  $M$  bei Drehung um die  $z$ -Achse in der  $xy$ -Ebene den "Torusmittenkreis" mit Radius  $a$ .

- a) Geben Sie eine Parameterdarstellung  $\vec{x}(u, v)$ ,  $(u, v) \in G \subset \mathbb{R}^2$  des Torus an.
- b) Für welche Radien  $r$ ,  $a$  besitzt der Torus nur reguläre Punkte ?
- c) Bestimmen Sie für  $a \leq r$  die Doppelpunkte von  $\Phi$  im Parametergebiet  $G = [-\pi, \pi) \times [-\pi, \pi)$ .  
**Hinweis:** Betrachten Sie die Lage des Kreises  $k$  zur Drehachse.
- d) Bestimmen Sie die Oberfläche des Torus  $\Phi$  für  $a > r$ .

Wie groß ist der Flächeninhalt des Teils von  $\Phi$ , der bei Parallelbeleuchtung parallel zur  $x$ -Achse von rechts beleuchtet wird, wenn der Torus undurchsichtig ist.

