Geometrie LB Blatt 12 Hausaufgaben

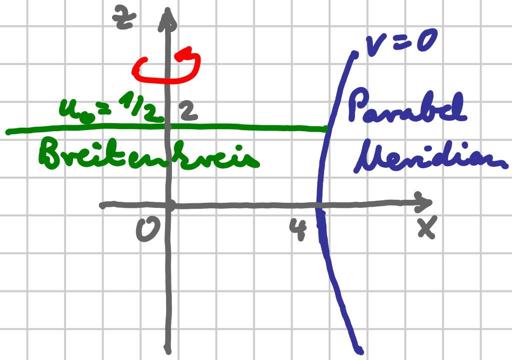
Notiztitel 16.12.2014

H27 $\Phi: \vec{x}(u,v) = \begin{pmatrix} (u^2+4)\cos v \\ (u^2+4)\sin v \\ 4u \end{pmatrix}$, $u \in \mathbb{R}$, $v \in [0, 2\pi[$

a) <u>u-Linie (speziell $v=0$)</u>: $\vec{x}(u,0)$

Parabel $x = \frac{z^2}{16} + 4$ in xz-Ebene

<u>v-Linien (u=const)</u>: $\vec{x}(u_0, v)$ Kreise in Ebene $z = 4u_0$ um z-Achse mit Radius u_0^2+4.



$\Rightarrow \Phi$ ist Drehfläche einer nach rechts geöffneten Parabel (Meridian) um die z-Achse

b) $\vec{x}_u = \begin{pmatrix} 2u\cos v \\ 2u\sin v \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_v = \begin{pmatrix} -(u^2+4)\sin v \\ (u^2+4)\cos v \\ 0 \end{pmatrix}$ Beide $\neq \vec{0}$, 3. Komponente liefert Regularität von Φ.

$\vec{x}(u,v) = \vec{x}(\bar{u},\bar{v}) \Leftrightarrow u = \bar{u}$ (3. Komp.), $v = \bar{v} + 2k\pi$ (1.+2. Komp.)

$\Rightarrow$ Im angegebenen Gebiet ist Φ regulär und einfach.

c) $g_{11} = \vec{x}_u^{\,2} = 4(u^2+4)$; $g_{12} = \vec{x}_u \vec{x}_v = 0$; $g_{22} = \vec{x}_v^{\,2} = (u^2+4)^2 \Rightarrow$

$g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = 4\cdot(u^2+4)^3$ ($\neq 0 \Rightarrow \Phi$ regulär).

d) $z = \pm 8 \Rightarrow u = \pm 2 \Rightarrow$ Oberfläche $O = \int_{-2}^{2}\int_{0}^{2\pi} \sqrt{g}\, dv\, du = \int_{-2}^{2}\int_{0}^{2\pi} 2(\sqrt{u^2+4})^3\, dv\, du =$

$= 4\pi \cdot \frac{1}{4}\left[u(\sqrt{u^2+4})^3 + 6u\sqrt{u^2+4} + 24\,\mathrm{arsinh}\,\frac{u}{2}\right]_{-2}^{2} =$

$= \pi[32\cdot\sqrt{2} + 24\sqrt{2} + 24\,\mathrm{arsinh}\,1]\cdot 2 = \pi[112\sqrt{2} + 48\,\mathrm{arsinh}\,1] \approx 630{,}511$

e) $\vec{x}_u \times \vec{x}_v = (u^2+4)\begin{pmatrix} 2u\cos v \\ 2u\sin v \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin v \\ \cos v \\ 0 \end{pmatrix} = (u^2+4)\begin{pmatrix} -4\cos v \\ -4\sin v \\ 2u \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \vec{n}(u,v) = \frac{\vec{x}_u \times \vec{x}_v}{|\vec{x}_u \times \vec{x}_v|} = \frac{1}{\sqrt{u^2+4}}\begin{pmatrix} -2\cos v \\ -2\sin v \\ u \end{pmatrix}$ $\left(|\vec{x}_u \times \vec{x}_v| = \sqrt{g}\ ! \quad \vec{n} \neq \vec{0} \Rightarrow \Phi \text{ regulär} \right)$

<u>Zusatz</u>: Umriss zur Richtung $(1\ 0\ 1)^T$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}(\vec{x}_u \times \vec{x}_v) = (u^2+4)(-4\cos v + 2u) = 0$

$\Leftrightarrow u = 2\cos v$ <u>Flächenkurve</u>

f) $\vec{x}^*(u,v) = \begin{pmatrix} f(u) \\ v \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x}_u^* = \begin{pmatrix} f'(u) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{x}_v^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} g_{11}^* = \vec{x}_u^{*2} = (f'(u))^2 \\ g_{12}^* = \vec{x}_u^* \vec{x}_v^* = 0 \\ g_{22}^* = \vec{x}_v^{*2} = 1 \end{cases}$ (*)

Mit $f(u) = 2\,\operatorname{arsinh}\frac{u}{2}$ gilt $f'(u) = \frac{2}{\sqrt{1+\left(\frac{u}{2}\right)^2}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{2}{\sqrt{4+u^2}}$ und

$\frac{4}{4+u^2} = g_{11}^* \overset{!}{=} \lambda\cdot g_{11} = \lambda\cdot 4(u^2+4) \Rightarrow \underline{\lambda = \frac{1}{(u^2+4)^2}} \Rightarrow \lambda\cdot g_{12} = 0 = g_{12}^*$

und $\lambda\cdot g_{22} = \frac{(u^2+4)^2}{(u^2+4)^2} = 1 = g_{22}^*$ d.h. $\alpha : \Phi \to \Phi^*$ ist lokal winkeltreu

Umgekehrt liefert der Ansatz (*) wie folgt eine Fkt $f(u)$ für α:

$g_{11} = \lambda g_{11}^*$, $g_{12} = \lambda g_{12}^*$, $g_{22} = \lambda g_{22}^*$ mit $\lambda(u,v) \neq 0$, also hier:

$$\begin{aligned} 4(u^2+4) &= \lambda\cdot f'^2 \\ 0 &= \lambda\cdot 0 \\ (u^2+4)^2 &= \lambda\cdot 1 \end{aligned} \;\underset{\lambda(u,v) = (u^2+4)^2}{\Rightarrow}\; f' = \frac{\pm 2}{\sqrt{u^2+4}} \;\Rightarrow\; \underbrace{f(u) = \pm 2\cdot\operatorname{arsinh}\frac{u}{2}}_{\text{Stammfunktion}} + \text{const}$$

H28 $\Phi: \vec{x}(u,v) = \begin{pmatrix} \cos u \cos v \\ \cos u \sin v \\ \sin u \end{pmatrix}$, $\bar{\Phi}: \bar{\vec{x}}(u,v) = \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ \sin u \end{pmatrix}$, $\Phi^*: \vec{x}^*(u,v) = \begin{pmatrix} v \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix}$

α, β sind flächentreu $\Leftrightarrow$ $g(u,v) = \bar{g}(u,v) = g^*(u,v)$ $\forall (u,v) \in G$

Berechnung der metrischen Fundamentalgrößen von Φ, $\bar{\Phi}$ und Φ^*:

$\vec{x}_u = \begin{pmatrix} -\sin u \cos v \\ -\sin u \sin v \\ \cos u \end{pmatrix}$, $\vec{x}_v = \begin{pmatrix} -\cos u \sin v \\ \cos u \cos v \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $g_{11} = \vec{x}_u^{\,2} = 1$, $g_{12} = \vec{x}_u \vec{x}_v = 0$,
$g_{22} = \vec{x}_v^{\,2} = \cos^2 u \Rightarrow g = g_{11} g_{22} - g_{12}^2 = \underline{\cos^2 u}$

$\bar{\vec{x}}_u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos u \end{pmatrix}$, $\bar{\vec{x}}_v = \begin{pmatrix} -\sin v \\ \cos v \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $\bar{g}_{11} = \bar{\vec{x}}_u^{\,2} = \cos^2 u$, $\bar{g}_{12} = \bar{\vec{x}}_u \bar{\vec{x}}_v = 0$
$\bar{g}_{22} = \bar{\vec{x}}_v^{\,2} = 1 \Rightarrow \bar{g} = \bar{g}_{11} \bar{g}_{22} - \bar{g}_{12}^2 = \underline{\cos^2 u}$

$\vec{x}_u^* = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos u \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_v^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $g_{11}^* = \vec{x}_u^{*2} = \cos^2 u$, $g_{12}^* = \vec{x}_u^* \vec{x}_v^* = 0$
$g_{22}^* = \vec{x}_v^{*2} = 1 \Rightarrow g^* = g_{11}^* g_{22}^* - g_{12}^{*2} = \underline{\cos^2 u}$

$\Rightarrow \alpha$ und β sind flächentreu, da $g = \bar{g} = g^* = \cos^2 u$.

γ ist sogar isometrisch, da $\bar{g}_{ij}(u,v) = g_{ij}^*(u,v)$ (Zylinderabwicklung)

α und β sind weder isometrisch noch konform (winkeltreu)

<u>Zusatz:</u> Die Abbildung α ist konstruktiv eine Projektion der Sphäre (Kugel) senkrecht zur z-Achse auf den Drehzylinder um die z-Achse, da die Verbindungsgerade von $\vec{x}(u,v)$ und $\bar{\vec{x}}(u,v)$ gegeben ist durch

$\vec{y} = \bar{\vec{x}}(u,v) + \lambda\left[\vec{x}(u,v) - \bar{\vec{x}}(u,v)\right] = \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ \sin u \end{pmatrix} + \lambda(\cos u - 1)\begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 0 \end{pmatrix}$ $\left[\perp \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$

also für $\lambda = \frac{1}{1-\cos u}$ die z-Achse senkrecht schneidet.