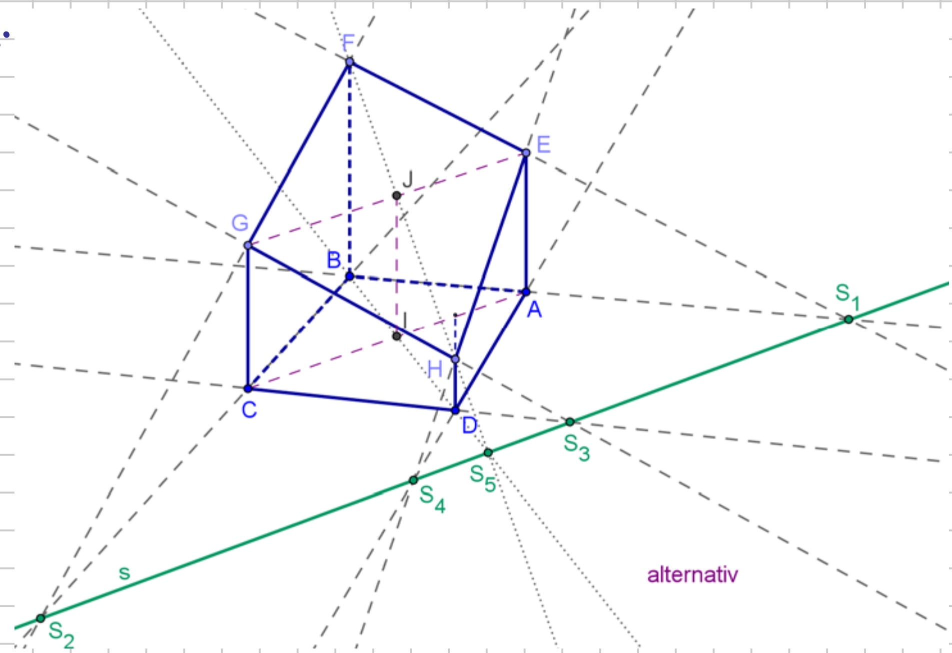
Geometrie LB   Blatt 5   Hausaufgaben

Notiztitel   08.11.2014

H10.



Inzidenzen:

unten / oben

hinten / links

vorne / rechts

In Ebene   gilt:

In Ebene   gilt:

=>

Annahme H ist bekannt, dann gilt

in Ebene   analog:

in Ebene   analog:

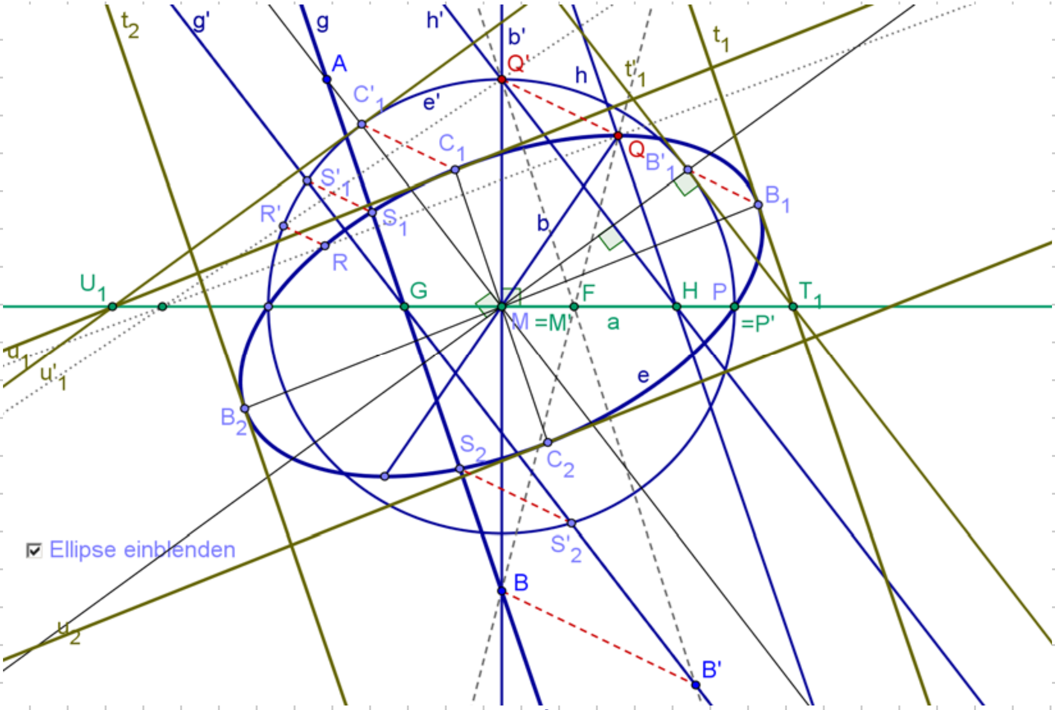
d.h.   bzw.

Mit Paralleler   erhält man

bzw.   (zur Zeichenkontrolle)

Alternativ kann man obige Konstruktion als perspektive Affinität deuten mit Affinitätsachse a und Punkt-Bildpunktpaar (A,E) und damit das Bild J des Diag.schnittpunkt I bestimmen.

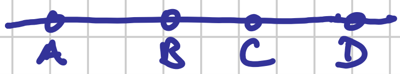
H11.



1) Wähle $P' = P$, $M' = M$, $e' = k(M'; P')$, b' mit $M' \in b' \perp a$ und $Q' \in b' \cap e'$.

Unter der Affinität φ mit Affinitätsachse $a = MP = M'P'$ und Punkt-Bildpunktpaar (Q, Q') ist e dann affines Kreisbild von $e' = \varphi(e)$, d.h. $e = \varphi^{-1}(e')$.

H12.



$DV(A,B,C,D) := \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} \cdot \varepsilon$

mit $\varepsilon = \begin{Bmatrix} +1 \\ -1 \end{Bmatrix}$, wenn das Paar (A,B) das Paar (C,D) $\begin{Bmatrix} \text{nicht} \\ — \end{Bmatrix}$ trennt

nach Vorlesung bzw. Angabe

Sei $\delta := DV(A,B,C,D) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (1)\ DV(A,B,D,C) = \frac{1}{\delta} \\ (2)\ DV(A,C,B,D) = 1-\delta \\ (3)\ DV(B,A,C,D) = \frac{1}{\delta} \\ (4)\ DV(B,A,D,C) = \delta \end{array} \right\} \Rightarrow$

4!=24 Möglichkeiten

lexikographisch

(1) $DV(B,A,D,C) \overset{(4)}{=} DV(A,B,C,D) =$

(2) $DV(B,A,C,D) \overset{(4)}{=} DV(A,B,D,C) \overset{(1)}{=}$

(3) $DV(C,A,D,B) \overset{(4)}{=} DV(A,C,B,D) \overset{(2)}{=}$

(4) $DV(C,A,B,D) \overset{(4)}{=} DV(A,C,D,B) \overset{(1)}{=}$

(5) $DV(D,A,B,C) \overset{(4)}{=} DV(A,D,C,B) \overset{(2)}{=}$

(6) $DV(D,A,C,B) \overset{(4)}{=} DV(A,D,B,C) \overset{(1)}{=}$

Es fehlen noch

(7) $DV(C,B,D,A) \overset{(4)}{=} DV(B,C,A,D) \overset{(2)}{=}$

(8) $DV(C,B,A,D) \overset{(4)}{=} DV(B,C,D,A) \overset{(1)}{=}$

(9) $DV(D,B,C,A) \overset{(4)}{=} DV(B,D,A,C) \overset{(2)}{=}$

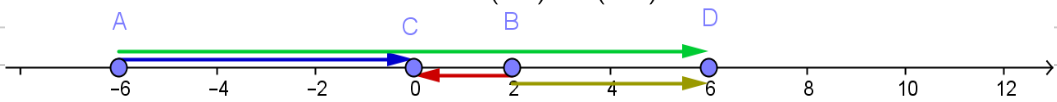
(10) $DV(D,B,A,C) \overset{(4)}{=} DV(B,D,C,A) \overset{(1)}{=}$

(11) $DV(D,C,B,A) \overset{(4)}{=} DV(C,D,A,B) \overset{(2)}{=}$

(12) $DV(D,C,A,B) \overset{(4)}{=} DV(C,D,B,A) \overset{(1)}{=}$

Anmerkung: Je 4 DV der 24 sind gleich $\delta, \frac{1}{\delta}, 1-\delta, \frac{1}{1-\delta}, 1-\frac{1}{\delta}, \frac{\delta}{1-\delta}$

Doppelverhältnis $\quad DV(A,B,C,D) = \dfrac{d(\overrightarrow{AC})}{d(\overrightarrow{BC})} : \dfrac{d(\overrightarrow{AD})}{d(\overrightarrow{BD})} = \dfrac{6}{-2} : \dfrac{12}{4} = -1$



unter Verwendung gerichteter Strecken

1) $\quad DV(A,B,D,C) = \dfrac{d(\overrightarrow{AD})}{d(\overrightarrow{BD})} : \dfrac{d(\overrightarrow{AC})}{d(\overrightarrow{BC})} = \dfrac{12}{4} : \dfrac{6}{-2} = -1 = \dfrac{1}{DV(A,B,C,D)}$

2) $\quad DV(A,C,B,D) = \dfrac{d(\overrightarrow{AB})}{d(\overrightarrow{CB})} : \dfrac{d(\overrightarrow{AD})}{d(\overrightarrow{CD})} = \dfrac{8}{2} : \dfrac{12}{6} = 2 = 1 - DV(A,B,C,D)$

3) $\quad DV(B,A,C,D) = \dfrac{d(\overrightarrow{BC})}{d(\overrightarrow{AC})} : \dfrac{d(\overrightarrow{BD})}{d(\overrightarrow{AD})} = \dfrac{-2}{6} : \dfrac{4}{12} = -1 = \dfrac{1}{DV(A,B,C,D)}$

4) $\quad DV(B,A,D,C) = \dfrac{d(\overrightarrow{BD})}{d(\overrightarrow{AD})} : \dfrac{d(\overrightarrow{BC})}{d(\overrightarrow{AC})} = \dfrac{4}{12} : \dfrac{-2}{6} = -1 = DV(A,B,C,D)$

Nachweis von 1), 3) und 4) einfach durch Bruchrechnen.

Nachweis von 2)

Zu zeigen: $DV(A,C,B,D) = 1 - DV(A,B,C,D)$

$$\Leftrightarrow \dfrac{d(\overrightarrow{AB})}{d(\overrightarrow{CB})} : \dfrac{d(\overrightarrow{AD})}{d(\overrightarrow{CD})} = 1 - \dfrac{d(\overrightarrow{AC})}{d(\overrightarrow{BC})} : \dfrac{d(\overrightarrow{AD})}{d(\overrightarrow{BD})}$$

$$\Leftrightarrow -\dfrac{d(\overrightarrow{AB}) \cdot d(\overrightarrow{CD})}{d(\overrightarrow{BC}) \cdot d(\overrightarrow{AD})} = 1 - \dfrac{d(\overrightarrow{AC}) \cdot d(\overrightarrow{BD})}{d(\overrightarrow{BC}) \cdot d(\overrightarrow{AD})}$$

$$\Leftrightarrow d(\overrightarrow{AC}) \cdot d(\overrightarrow{BD}) - d(\overrightarrow{AB}) \cdot d(\overrightarrow{CD}) = d(\overrightarrow{BC}) \cdot d(\overrightarrow{AD})$$

$$\Leftrightarrow d(\overrightarrow{AC}) \cdot [d(\overrightarrow{AD}) - d(\overrightarrow{AB})] - d(\overrightarrow{AB}) \cdot [d(\overrightarrow{AD}) - d(\overrightarrow{AC})] = d(\overrightarrow{BC}) \cdot d(\overrightarrow{AD})$$

$$\Leftrightarrow [d(\overrightarrow{AC}) - d(\overrightarrow{AB})] \cdot d(\overrightarrow{AD}) = d(\overrightarrow{BC}) \cdot d(\overrightarrow{AD}) \quad \text{qed, da} \quad d(\overrightarrow{AC}) - d(\overrightarrow{AB}) = d(\overrightarrow{BC})$$