Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Prof. J. Hartl, Dr. H. Vogel

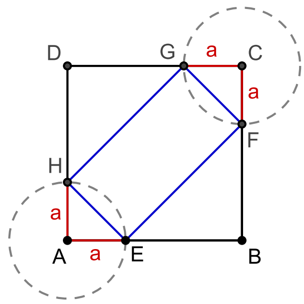
WS 2013/14
Blatt 13

Geometrie für das Lehramt an beruflichen Schulen
Klausur am 17. Februar 2014

Arbeitszeit 90 Minuten

Aufgabe 1 (ca. 5 Punkte)

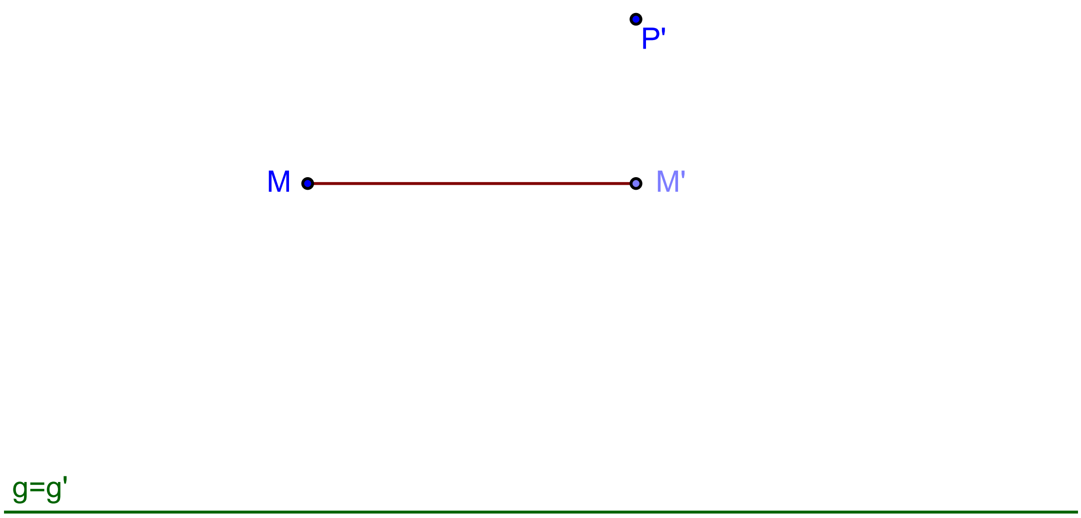
In der euklidischen Ebene sei ein Quadrat $ABCD$ mit Seitenlänge $|\overline{AB}| = 1$ gegeben. Trägt man von den Ecken A und C aus gleiche Strecken der Länge a mit $0 < a < 1$ auf den Seiten ab, so erhält man die Ecken E, F, G, H eines Vierecks, vgl. Skizze.



Zeigen Sie mit bekannten elementaren Aussagen für Dreiecke, dass das Viereck $EFGH$ ein Rechteck mit dem Umfang $2\sqrt{2}$ ist.

Aufgabe 2 (ca. 6 Punkte)

In der projektiv abgeschlossenen euklidischen Ebene $\mathbf{P}^2$ sei eine ebene perspektive Affinität durch Vorgabe ihrer Fixpunktgerade g und eines Punkt-Bildpunktpaars (M, M') gegeben. Ferner sei k der Kreis um M, dessen Bild eine Ellipse um M' ist und den Punkt P' enthält.



Konstruieren Sie

a) das Urbild P von P' und damit den Kreis k um M,

b) das Paar orthogonaler Geraden durch M, das auf ein Paar orthogonaler Geraden durch M' abgebildet wird,

c) die Scheitel $S_1', ..., S_4'$ von k' und skizzieren Sie die Ellipse $e = k'$,
Hinweis: Zum Skizzieren von $e = k'$ können Sie auch weitere Punkte verwenden.

d) die gemeinsamen Tangenten von k und k'.

Hinweis: Es genügt die Konstruktion der gesuchten Objekte,
eine ausführliche Konstruktionsbeschreibung ist **nicht** erforderlich!

Aufgabe 3 (ca. 4 Punkte)

Im dreidimensionalen projektiven Raum $\mathbf{P}^3$ sei in einer Ebene δ ein Dreieck ΔABC mit den Eckpunkten A, B, C und den Seiten $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ gegeben.
Dualisieren Sie diese Figur im $\mathbf{P}^3$ und skizzieren Sie die zugehörige Figur.

Aufgabe 4 (ca. 7 Punkte)

In der projektiv erweiterten euklidischen Ebene $\mathbf{P}^2$ sei der Kegelschnitt $k: \ \vec{x}^T A \vec{x} = 0$ mit $A = A^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ in homogenen Koordinaten gegeben.

Bestimmen Sie:

a) den Schnitt A von k mit der Ferngeraden $x_0 = 0$,

b) die Polare q zum Punkt $Q(0, a, 1)$ bezüglich k mit $a \neq 0$,

c) den Schnitt $B \neq A$ von q mit k und geben Sie die Tangente t von k im Punkt B an,

d) die Gleichung von k im xy-Koordinatensystem. Was für ein Kegelschnitt ist k?

Aufgabe 5 (ca. 9 Punkte)

Im $\mathbb{R}^3$ sei eine $C^\infty-$Kurve c gegeben durch die Parameterdarstellung:

$$c: \ \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 3 \cos t \\ 5 \sin t \\ 4 \cos t \end{pmatrix} , \quad t \in [0, 2\pi[.$$

a) Zeigen Sie, dass c regulär und einfach ist.

b) Berechnen Sie die Länge s der Kurve c.

c) Zeigen Sie, dass die Krümmung $\kappa(t)$ von c konstant und die Torsion $\tau(t)$ von c Null ist.

d) Geben Sie die Evolute von c an. Was für eine Kurve ist c?

Aufgabe 6 (ca. 9 Punkte)

Im $\mathbb{R}^3$ sei eine $C^\infty-$Fläche Φ gegeben durch die Parameterdarstellung:

$$\Phi: \ \vec{x}(u, v) = \begin{pmatrix} u^3 \cos v \\ u^3 \sin v \\ 3u \end{pmatrix} , \quad u > 0, \ v \in [-\pi, \pi].$$

a) Zeigen Sie, dass $g = 9u^6(u^4 + 1)$ die Determinante der metrischen Fundamentalgrößen von Φ ist.

b) Bestimmen Sie die Oberfläche O desjenigen Flächenstücks von Φ, das unterhalb der Ebene $\delta: \ z = 3$ liegt. ***Hinweis:*** Verwenden Sie die Substitution $w = u^4 + 1$.

c) Durch die Funktion $v(t)$ sei eine Flächenkurve $c: \ \vec{y}(t) := \vec{x}(t, v(t))$ von Φ gegeben.
Bestimmen Sie $v(t)$ "bis auf Quadratur" so, dass die Tangenten von c mit der z-Achse stets den Winkel 45° einschließen, d.h. c eine Böschungslinie von Φ ist.
Hinweis: Es genügt die Angabe von $\dot{v}(t)$.