

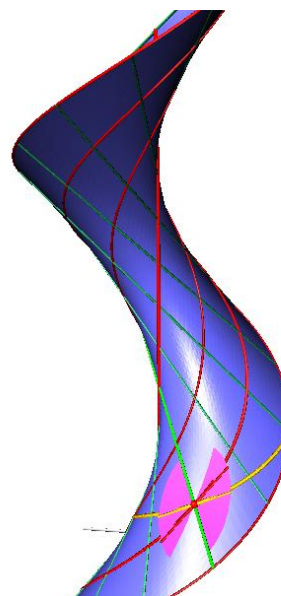
Geometrie für das Lehramt an beruflichen Schulen

Tutoraufgaben:

T28. Durch die Parameterdarstellung $\Phi \subset \mathbb{R}^3 : \vec{x}(u, v) = \begin{pmatrix} u \cos v \\ u \sin v \\ v - u \end{pmatrix}, (u, v) \in \mathbb{R}^2$ ist

eine C^∞ -Fläche im Raum gegeben.

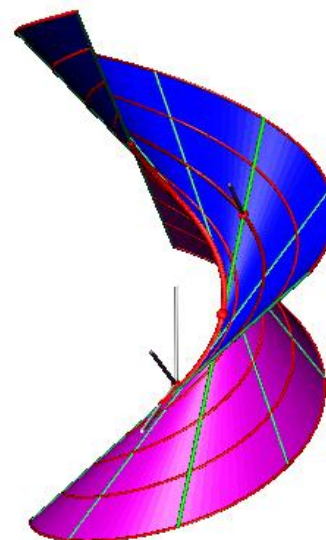
- Beschreiben Sie die Gestalt von Φ anhand ihrer Parameterlinien .
- Zeigen Sie, dass Φ regulär ist, und bestimmen Sie den Normaleneinheitsvektor von Φ .
- Bestimmen Sie die erste Fundamentalform von Φ .
- Welche v -Linie $x(u_0, v)$ schneidet alle u -Linien $x(u, v_0)$ unter 135° ?
- Bestimmen Sie eine Flächenkurve von Φ , welche die u -Linien von Φ orthogonal schneidet.
- Zeigen Sie, dass Φ über dem Parametergebiet $U =]0, 2[\times]0, \pi[$ einfach ist und geben Sie den Flächeninhalt des zugehörigen Flächenstücks an.



T29. Die Tangenten einer regulären Raumkurve $c : \vec{y}(s), s \in I \subset \mathbb{R}$ (s Bogenlänge) ohne W -Punkte bilden im \mathbb{R}^3 die **Tangentenfläche** von c

$$\Phi : \vec{x}(s, t) := \vec{y}(s) + t \cdot \vec{y}'(s), s \in I, t \in J \subset \mathbb{R}.$$

- Für welche offenen Intervalle $J \subset \mathbb{R}$ ist Φ regulär ?
- Beschreiben Sie die Parameterlinien von Φ .
- Zeigen Sie, dass die Tangentenebenen von Φ für $t \neq 0$ längs jeder Erzeugenden von Φ ($s = s_0 = \text{const.}$) zusammenfallen.
- Berechnen Sie die metrischen Fundamentalgrößen von Φ .
- Zeigen Sie, dass Φ in die Ebene abwickelbar ist, d.h. dass Φ lokal isometrisch zu einer ebenen Fläche $\tilde{\Phi} \subset \mathbb{R}^2$ ist.



Hausaufgaben:

H27. Durch die Parameterdarstellung

$$\Phi \subset \mathbb{R}^3 : \vec{x}(u, v) = \begin{pmatrix} (u^2 + 4) \cos v \\ (u^2 + 4) \sin v \\ 4u \end{pmatrix}, \quad (u, v) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi[$$

ist eine C^∞ -Fläche im Raum gegeben.

- Beschreiben Sie die Parameterlinien und die Gestalt von Φ .
- Zeigen Sie, dass die Fläche Φ regulär und einfach ist.
- Bestimmen Sie die metrischen Fundamentalgrößen g_{ij} von Φ .
- Berechnen Sie die Oberfläche des Flächenrings auf Φ , der zwischen den beiden Ebenen $z = \pm 8$ liegt.
- Berechnen Sie den Normaleneinheitsvektor $\vec{n}(u, v)$ von Φ in $\vec{x}(u, v)$.

Im Folgenden sei durch die Parameterdarstellung

$$\Phi^* \subset \mathbb{R}^3 : \vec{x}^*(u, v) = \begin{pmatrix} f(u) \\ v \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (u, v) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi[$$

mit $f(u) = 2 \operatorname{arsinh} \frac{u}{2} \in C^\infty$ eine weitere Fläche Φ^* (in der xy -Ebene) gegeben.

- Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\alpha : \Phi \rightarrow \Phi^*, \quad \vec{x}(u, v) \mapsto \vec{x}^*(u, v)$$

lokal winkeltreu (konform) ist.

H28. Über dem Gebiet $G := \{(u, v) \mid -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}, -\pi < v < \pi\} \subset \mathbb{R}^2$ sind drei Flächen $\Phi, \bar{\Phi}$ und Φ^* durch folgende Parameterdarstellungen gegeben:

$$\Phi : \vec{x}(u, v) = \begin{pmatrix} \cos u \cos v \\ \cos u \sin v \\ \sin u \end{pmatrix}, \quad \bar{\Phi} : \vec{\bar{x}}(u, v) = \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ \sin u \end{pmatrix}, \quad \Phi^*, \vec{x}^*(u, v) = \begin{pmatrix} v \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie:

Die Abbildungen $\alpha : \Phi \rightarrow \bar{\Phi}, \vec{x}(u, v) \mapsto \vec{\bar{x}}(u, v)$ und $\beta : \Phi \rightarrow \Phi^*, \vec{x}(u, v) \mapsto \vec{x}^*(u, v)$ sind flächentreu.

Welche Eigenschaften hat die Abbildung $\gamma : \bar{\Phi} \rightarrow \Phi^*, \vec{\bar{x}}(u, v) \mapsto \vec{x}^*(u, v)$.