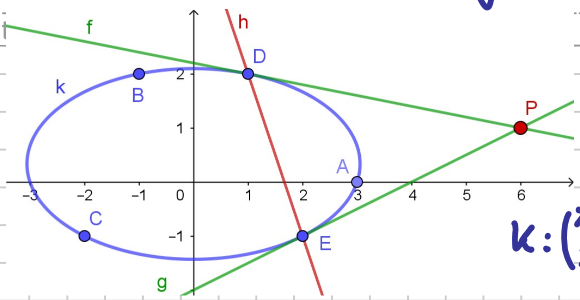
Geometrie LB Übungen Blatt 8

19.11.2020

T20)

a)



$K: x^2+3y^2-2y=9$ (1) (affin)

$x=\frac{x_1}{x_0}$, $y=\frac{x_2}{x_0}$ (TF)

$K: \left(\frac{x_1}{x_0}\right)^2+3\left(\frac{x_2}{x_0}\right)^2-2\,\frac{x_2}{x_0}=9$ (homog)

$\Leftrightarrow K: 0 = 9x_0^2 - x_1^2 - 3x_2^2 + 2x_0x_2 = \vec{x}^T \underbrace{\begin{pmatrix}9&0&1\\0&-1&0\\1&0&-3\end{pmatrix}}_{=A=A^T}\vec{x}$

homog Pkt koord. von P

$\Rightarrow h: 0 = \vec{p}^{\,T}A\vec{x} = \vec{x}^TA\vec{p} = 10x_0-6x_1-2x_2$

mit homog. Geradenkoord. $\vec{h} = A\vec{p} = \begin{pmatrix}9&0&1\\0&-1&0\\1&0&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\6\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\-6\\-2\end{pmatrix}$

(TF)

$\Rightarrow h: 10-6x-2y=0 \Leftrightarrow y=5-3x$ (2) (affin)

Schnittpkte D, E von h mit k durch Einsetzen (2) in (1)

$x^2+3(5-3x)^2-2(5-3x)=9 \Leftrightarrow x^2+75-90x+27x^2-10+6x=9$

$\Leftrightarrow 28x^2-84x+56=0 \quad |:28 \quad \Leftrightarrow x^2-3x+2=0$

$\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2} = \begin{cases}2 \xrightarrow{(2)} y_1=-1\\ 1 \longrightarrow y_2 = 2\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix}E(2,-1)\\ D(1,2)\end{matrix}$

b) $f = PD$, $g = PE$ sind die Tangenten von P an k

Begr: Nach Vor. sind die Polaren von D, E (∈K) die Tgtn von k in D, E

Wegen D, E ∈ h enthalten diese den Pol P von h. (Hauptsatz!)

Probe: Geraden koord.

$$\left.\begin{matrix} \text{von } f: \ \vec{f} = \begin{pmatrix}9&0&1\\0&-1&0\\1&0&-3\end{pmatrix}\overset{(D)}{\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}11\\-1\\-5\end{pmatrix} \\ \text{von } g: \ \vec{g} = \begin{pmatrix}9&0&1\\0&-1&0\\1&0&-3\end{pmatrix}\overset{(E)}{\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}8\\-2\\4\end{pmatrix}\end{matrix}\right\} \begin{pmatrix}11\\-1\\-5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}8\\-2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-14\\-84\\-14\end{pmatrix} = -14\overset{(P)}{\begin{pmatrix}1\\6\\1\end{pmatrix}}$$

c) $H(x,y) := 10-6x-2y$ (nicht normierte HNF!)

$\left.\begin{matrix}H(P) = 10-36-2 = -28\\ H(A) = 10-18 = -8\end{matrix}\right\}$ im Licht

$\left.\begin{matrix}H(B) = 10+6-4 = 12\\ H(C) = 10+12+2 = 24\end{matrix}\right\}$ im Schatten

D, E ... Eigenschattengrenze

Beachte: Vorteil gegenüber: Schneide PA mit k und prüfe, welcher Schnittpkt näher zu P liegt.

T21 $\vec{s} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$. S schiefsym. Matrix mit $\underline{S\vec{x} = \vec{s} \times \vec{x}}$ (0)

erklärlich!

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{s} \times \vec{x} = \begin{pmatrix} s_2x_3 - s_3x_2 \\ s_3x_1 - s_1x_3 \\ s_1x_2 - s_2x_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -s_3 & s_2 \\ s_3 & 0 & -s_1 \\ -s_2 & s_1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:S} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$S^T = \begin{pmatrix} 0 & s_3 & -s_2 \\ -s_3 & 0 & s_1 \\ s_2 & -s_1 & 0 \end{pmatrix} = -S \Rightarrow S \text{ ist schiefsymmetrisch.}$$

a) Zeige E−S ist regulär:

Bew 1: (algebraisch rechnerisch) E−S regulär $\Leftrightarrow \det(E-S) \neq 0$

$$\det(E-S) = \det\begin{pmatrix} 1 & s_3 & -s_2 \\ -s_3 & 1 & s_1 \\ s_2 & -s_1 & 1 \end{pmatrix} = 1 + s_1\cancel{s_2}s_3 - s_1\cancel{s_2}s_3 + s_2^2 + s_1^2 + s_3^2 =$$
$$= 1 + |\vec{s}|^2 \geq 1 > 0 \quad (1)$$

Bew 2: (vektoriell) E−S regulär $\Leftrightarrow [(E-S)\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} = 0]$

Sei $\vec{0} = (E-S)\vec{x} = E\vec{x} - S\vec{x} \overset{(0)}{=} \vec{x} - \vec{s} \times \vec{x} \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{s} \times \vec{x}$ (*)

Andererseits gilt $\vec{x} \perp \vec{s} \times \vec{x} \overset{(*)}{\Longrightarrow} \vec{x} \perp \vec{x} \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$ ✓

Bew 3: Variante zu Bew 2:

Sei $\vec{0} = (E-S)\vec{x} = E\vec{x} - S\vec{x} \overset{(0)}{=} \vec{x} - \vec{s} \times \vec{x} \quad | \circ \vec{x}$ (Skalarprod)

$\Rightarrow 0 = \vec{x} \circ \vec{x} - \underbrace{(\vec{s} \times \vec{x}) \circ \vec{x}}_{=0} \Leftrightarrow \vec{x} \circ \vec{x} = 0 \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$ ✓

b) Zeige $U := (E-S)^{-1}(E+S)$ ist Drehmatrix, d.h. $UU^T = E$ ①, $\det U = 1$ ②

① $UU^T = (E-S)^{-1}(E+S)[(E-S)^{-1}(E+S)]^T =$ $\qquad (A \cdot B)^T = B^T A^T$

$= (E-S)^{-1}(E+S)\underbrace{(E+S)^T}_{\shortparallel}\underbrace{((E-S)^{-1})^T}_{\shortparallel}$ $\qquad (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

NR
$= (E-S)^{-1}(E+S)(E-S)(E+S)^{-1}$

NR
$= \underbrace{(E-S)^{-1}(E-S)}_{E} \cdot \underbrace{(E+S)(E+S)^{-1}}_{E} = E \cdot E = E$ ✓

NR: $(E+S)^T = \underset{E}{E^T} + \underset{-S}{S^T} = E - S$ und $(E-S)^T = \underset{E}{E^T} - \underset{-S}{S^T} = E + S$

NR: $(E+S)(E-S) = E \cdot E + \underbrace{S \cdot E}_{=E \cdot S} - \underbrace{E \cdot S}_{=S \cdot E} - S \cdot S = (E-S)(E+S)$

② $\det(U) = \det[(E-S)^{-1}(E+S)] \overset{\text{Determinantenmultiplikationssatz}}{=} \det[(E-S)^{-1}]\cdot\det(E+S)$

$= \dfrac{1}{\det(E-S)}\cdot\det(E+S) \overset{NR}{\underset{s.o.}{=}} \dfrac{\det[(E-S)^T]}{\det(E-S)} = \dfrac{\det(E-S)}{\det(E-S)} = 1$ ✓

$\det(A^T) = \det(A)$

alternativ mit (1)

$\det(E-S) = 1+|\vec{s}|^2$ und $\det(E+S) = \det(E-(-S)) = 1+|-\vec{s}|^2 = 1+|\vec{s}|^2$

c) Drehachse? Gesucht $\vec{x}\in\mathbb{R}^3\setminus\{\vec{0}\}$ mit $U\vec{x} = \vec{x}$

$\Leftrightarrow (E-S)^{-1}(E+S)\vec{x} = \vec{x} \Leftrightarrow (E+S)\vec{x} = (E-S)\vec{x}$

$\Leftrightarrow S\vec{x} = -S\vec{x} \Leftrightarrow 2S\vec{x} = \vec{0} \overset{(0)}{\Leftrightarrow} \vec{s}\times\vec{x} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \vec{x} = \lambda\vec{s}$ d.h. $\vec{s}$ ist (nichtorient.) Richtung der Drehachse!

Drehwinkel φ:

Da die Abbildung geometrisch definiert ist, also unabhängig vom Koord.system, dürfen wir das Koord.system so wählen, dass die z-Achse in Richtung von $\vec{s}$ zeigt, d.h. $\vec{s} = \begin{pmatrix}0\\0\\s\end{pmatrix}$, $s>0$

$\Rightarrow E+S = \begin{pmatrix}1 & -s & 0\\ s & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $E-S = \begin{pmatrix}1 & s & 0\\ -s & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow (E-S)^{-1} = \dfrac{1}{1+s^2}\begin{pmatrix}1 & -s & 0\\ s & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1+s^2\end{pmatrix}$ Beachte: $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{\alpha\delta-\beta\gamma}\begin{pmatrix}\delta & -\beta\\ -\gamma & \alpha\end{pmatrix}$

$\Rightarrow U = (E-S)^{-1}(E+S) = \dfrac{1}{1+s^2}\begin{pmatrix}1 & -s & 0\\ s & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1+s^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -s & 0\\ s & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} =$

$= \dfrac{1}{1+s^2}\begin{pmatrix}1-s^2 & -2s & 0\\ 2s & 1-s^2 & 0\\ 0 & 0 & 1+s^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

Drehmatrix um z-Achse

$\Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{1-s^2}{1+s^2}$, $\sin\varphi = \dfrac{2s}{1+s^2}$ (*)

d.h. Der Betrag s von $\vec{s}$ liefert mit (*) den Drehwinkel φ!

(Unabhängig vom Koordinatensystem!)

alternativ $\cos\delta = \dfrac{\operatorname{Spur} U - 1}{2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3-s^2}{1+s^2} - 1\right) = \dfrac{1-s^2}{1+s^2}$

Zusatz: Man kann zeigen, dass $\tan\frac{\varphi}{2} = |\vec{s}|$ gilt:

Betrachte $\varphi = 2\tau$, so gilt

$\cos^2\tau + \sin^2\tau = 1$

$$\cos\varphi = \cos 2\tau = \cos^2\tau - \sin^2\tau = 2\cos^2\tau - 1 \overset{(*)}{=} \frac{1-s^2}{1+s^2}$$

$$\Rightarrow \cos^2\tau = \frac{1}{2}\left(\frac{1-s^2}{1+s^2} + 1\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{1+s^2} = \frac{1}{1+s^2} \quad (1)$$

$$\sin\varphi = \sin 2\tau = 2\sin\tau\cos\tau \overset{(*)}{=} \frac{2s}{1+s^2} \Rightarrow \sin\tau\cos\tau = \frac{s}{1+s^2} \quad (2)$$

$$\Rightarrow \tan\tau = \frac{\sin\tau}{\cos\tau} = \frac{\sin\tau\cos\tau}{\cos^2\tau} = s \quad \text{(Länge des Vektors } \vec{s}\text{)}$$

Grafik 2

$\vec{s} = d\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \Rightarrow S = d\begin{pmatrix}0 & -3 & 2\\3 & 0 & -1\\-2 & 1 & 0\end{pmatrix}$

mit $S\vec{x} = \vec{s}\times\vec{x}$

$U = (S-E)^{-1}(S+E) = \begin{pmatrix}-0.73 & -0.13 & 0.67\\0.67 & -0.33 & 0.67\\0.13 & 0.93 & 0.33\end{pmatrix}$

U ist Drehmatrix

Probe: $U\cdot U^T = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ und $\det(U) = 1$

mit Drehachse a in Richtung $\vec{s}$ und Drehwinkel φ

mit $\cos(\varphi) = \frac{1-(\vec{s})^2}{1+(\vec{s})^2} = \frac{1-14d^2}{1+14d^2} = -0.87$

d = 1

$\varphi = 150.07°$

setze Winkel 60°

setze Winkel 90°

setze Winkel 120°