4.3 Euklidische Geometrie mit Skalarprodukt und Vektorprodukt

4.3.1 Zerlegung einer Kraft, Skalarprodukt

Figur-4-3-1-Skalarprodukt (physikalisch)

Figur: Wagen wird mit einer Schnur schräg nach oben auf horizontaler Bahn gezogen: Kraft $\vec{F}$, Fahrtrichtung $\vec{s}$.

Die Kraft, die den Wagen in Richtung $\vec{s}$ zieht, hat den Betrag

$$\pm|\vec{F}|\cos\varphi \text{ mit } \varphi = \angle(\vec{F},\vec{s}).$$

Die verrichtete Arbeit ist Kraft mal Weg

$$|\vec{F}|\cdot|\vec{s}|\cdot\cos\varphi =: \vec{F}\circ\vec{s}$$

und liefert ein Produkt $\circ$ für Vektoren $\vec{F},\vec{s}$

Offenbar gilt:

1) Symmetrie: $\vec{F}\circ\vec{s} = \vec{s}\circ\vec{F}$

$\vec{F}\circ\vec{s} = |\vec{s}|\cdot|\vec{F}|\cos\varphi = |\vec{F}|\cdot|\vec{s}|\cos\varphi = \vec{s}\circ\vec{F}$

$|\vec{s}|$-mal ($\pm$ die Länge der Normalprojektion von $\vec{F}$ auf eine Gerade mit Richtung $\vec{s}$) und

$|\vec{F}|$-mal ($\pm$ die Länge der Normalprojektion von $\vec{s}$ auf eine Gerade mit Richtung $\vec{F}$) $\quad\Rightarrow$

2) Othogonalität: $\vec{F} \circ \vec{s} = 0$
$\Leftrightarrow \quad (\vec{F} = \vec{o}$ oder $\vec{s} = \vec{o}$ oder $\vec{F} \perp \vec{s})$

3) Linearität/Distributivität:

a) $(\lambda \cdot \vec{F}) \circ \vec{s} = \lambda \cdot (\vec{F} \circ \vec{s})$

Warum gilt das auch für negative λ?

b) $(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) \circ \vec{s} = \vec{F}_1 \circ \vec{s} + \vec{F}_2 \circ \vec{s}$

Betrachte $\vec{s} \parallel$ Zeichenebene, dann sind Risse von Lotebenen zu $\vec{s}$ projizierend.

3) Positive Definitheit:
$\vec{F} \circ \vec{F} = |\vec{F}|^2 \geq 0$ und $\vec{F} \circ \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F} = \vec{o}$.

$\circ$ ist somit eine positiv definite Bilinearform (**BLF**), also ein **Skalarprodukt** der beiden Vektoren $\vec{F}$ und $\vec{s}$ im Sinn der LA.

Schreibweisen:

$$\vec{F} \circ \vec{s} =: < \vec{F}, \vec{s} > =: \vec{F} \cdot \vec{s} =: \vec{F}\vec{s}.$$

$$\vec{F}^2 := \vec{F} \circ \vec{F} = |\vec{F}|^2$$

4.3.2 Kanonische Darstellung im $\mathbb{R}^3$

Sei $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ eine Orthonormalbasis (**ONB**), d.h.

$$\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2 \perp \vec{e}_3 \perp \vec{e}_1$$

und

$$|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 1$$

Dann gilt für Vektoren $\vec{x}$, $\vec{y}$:

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$$

$$\vec{y} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3$$

mit $x_i, y_i \in \mathbb{R}(i = 1, 2, 3)$ nach obiger BLF

$$\vec{x} \circ \vec{y} = \vec{x}\vec{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3. \qquad \Rightarrow$$

Sind $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ Koordinaten-vektoren **bezüglich einer ONB (!)**, so ist das **Skalarprodukt** von $\vec{x}$ und $\vec{y}$

$$\vec{x}\vec{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = \vec{x}^T\vec{y} = \vec{y}^T\vec{x}.$$

4.3.3 Norm und Winkel im $\mathbb{R}^n$

$$||\vec{x}|| := |\vec{x}| := \sqrt{\vec{x}^2}$$

heißt die **Länge** oder die **Norm** oder der **Betrag** von $\vec{x}$ und für den **Winkel** zwischen $\vec{x}$ und $\vec{y}$ gilt:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{x} \circ \vec{y}}{|\vec{x}||\vec{y}|} \text{ mit } \varphi = \angle(\vec{x}, \vec{y}).$$

$$p = \vec{y} \cdot \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \ \ (= |\vec{y}|\cos\varphi)$$

ist die **Normalprojektion** p von $\vec{y}$ auf $\vec{x}$

4.3.4 Das Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$

$\vec{v},\ \vec{w} \in \mathbb{R}^3$. Dann definiert man:

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} :=$$

$$:= \begin{pmatrix} \det \begin{pmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} v_3 & w_3 \\ v_1 & w_1 \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}$$

Das ist das **Vektorprodukt** oder **Kreuzprodukt** (oder **äußere Produkt**) der Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$,
das wir in Figur-3-3-1-d-Vektorprodukt aus dem Determinantenentwicklungssatz von Laplace gewonnen haben.

Für alle $\vec{x}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$\det(\vec{x}\,\vec{v}\,\vec{w}) = \vec{x}^T(\vec{v} \times \vec{w})$$

Satz: Für alle $\vec{x}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ ist

$$\vec{x}^T(\vec{v} \times \vec{w})$$

das (orientierte) Volumen des von $\vec{x}, \vec{v}, \vec{w}$ aufgespannten **Spat**s = **Parallelepipeds**.

Siehe Figur-4-3-4-Spatprodukt

Daraus folgt speziell:

$$\vec{v}^T(\vec{v}\times\vec{w}) = \det\begin{pmatrix} v_1 & v_1 & w_1 \\ v_2 & v_2 & w_2 \\ v_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} = 0 \quad (*)$$

und

$$\vec{w}^T(\vec{v}\times\vec{w}) = 0 \quad (**)$$

Aus (*) und (**) folgt

Satz: Für alle $\vec{v},\vec{w}\in\mathbb{R}^3$ gilt: $\quad \vec{v}\times\vec{w}\perp\vec{v},\vec{w}$.

Wählt man für $\vec{x}$ speziell einen Einheitsvektor in Richtung von $\vec{v}\times\vec{w}$, so ist

$$\vec{x}^T(\vec{v}\times\vec{w}) = \frac{(\vec{v}\times\vec{w})^T}{||\vec{v}\times\vec{w}||}(\vec{v}\times\vec{w}) = ||\vec{v}\times\vec{w}||$$

1-mal die (orientierte) Grundfläche des von $\vec{x},\vec{v},\vec{w}$ aufgespannten Spats. Daher gilt:

Satz: Für alle $\vec{v},\vec{w}\in\mathbb{R}^3$, die Koordinatenvektoren bezüglich einer ONB sind, ist

$$||\vec{v}\times\vec{w}|| \quad (= |\vec{v}||\vec{w}|\sin\varphi \;\text{ mit } \varphi = \angle(\vec{v},\vec{w}))$$

die Fläche des von $\vec{v},\vec{w}$ aufgespannten Parallelogramms.

Vgl. Figur-4-3-4-Vektorprodukt

Satz: Für alle $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}$$

Bew.: Definition anschauen!

Satz: Für alle $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$$

Bew.: nachrechnen!

Satz: Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und für alle $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$(\lambda \vec{v}) \times \vec{w} = \lambda \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$$

Bew.: Definition anschauen!

Satz: Sind $\vec{v}$, $\vec{w}$ Koordinatenvektoren bzgl. einer ONB, so gilt die **Identität von Lagrange**:

$$||\vec{v} \times \vec{w}||^2 + (\vec{v} \circ \vec{w})^2 = ||\vec{v}||^2 ||\vec{w}||^2$$

Figur-4-3-4-LagrangeIdentität (analyt.)

$$||\vec{v} \times \vec{w}||^2 = ||\vec{v}||^2 ||\vec{w}||^2 - (\vec{v} \circ \vec{w})^2 =$$

$$= ||\vec{v}||^2 ||\vec{w}||^2 - ||\vec{v}||^2 ||\vec{w}||^2 \cos^2 \angle(\vec{v}, \vec{w}) =$$

$$= ||\vec{v}||^2 ||\vec{w}||^2 \sin^2 \angle(\vec{v}, \vec{w})$$

Vgl. Flächeninhalt der Parallelogramms, das von $\vec{v}$ und $\vec{w}$ aufgespannt wird. Figur-4-3-4-Vektorprodukt zeigt bereits eine geom. Herl. der Lagrangeidentität.

Eine geometrische Interpretation, wenn $\vec{v}$, $\vec{w}$ Koordinatenvektoren bezüglich einer ONB:

$$\vec{v} \times \vec{w} \text{ ist ein Vektor } \perp \vec{v}, \vec{w}$$

$$\text{mit der Länge } ||\vec{v}|| \cdot ||\vec{w}|| \cdot \sin \angle(\vec{v}, \vec{w}).$$

Davon gibt es zwei!

Von jetzt an werde eine Rechts-ONB vorausgesetzt. Dann gilt allgemein:

$\vec{x}^T(\vec{v} \times \vec{w}) = \det(\vec{x}\,\vec{v}\,\vec{w}) = \det(\vec{v}\,\vec{w}\,\vec{x}) > 0 \Leftrightarrow$

$\vec{v}, \vec{w}, \vec{x}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem. Wegen

$\det(\vec{v}, \vec{w}, \vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{v} \times \vec{w})^2 = ||\vec{v} \times \vec{w}||^2 > 0$

falls $\vec{v}$, $\vec{w}$ l.u. folgt:

Satz: $\vec{v}, \vec{w}, \vec{v} \times \vec{w}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem, falls $\vec{v}, \vec{w}$ l.u.

4.3.5 **Beispiele** (bzgl. kart. Rechts-KSe)

a) Geraden $g: \vec{x} = \vec{a} + t\vec{v}, \quad t \in \mathbb{R}$
$h: \vec{x} = \vec{b} + s\vec{w}, \quad s \in \mathbb{R}$
g nicht parallel zu h
Ges.: Abstand d(g,h)

Beh.: d$(g,h) = \frac{|\det(\vec{v},\vec{w},\vec{b}-\vec{a})|}{|\vec{v}\times\vec{w}|}$

Warum?
Figur-4-3-5-a-AbstandGeraden
Blickrichtung $\perp \vec{v} \times \vec{w}$,
Blickrichtung nicht parallel zu g,
nicht parallel zu h
Dann sieht man g und h zueinander parallel
d$(g,h) =$ |Normalprojektion von $\vec{b} - \vec{a}$ auf $\vec{v} \times \vec{w}$|

$$= |(\vec{b} - \vec{a})\frac{\vec{v} \times \vec{w}}{|\vec{v} \times \vec{w}|}| = \frac{|\det(\vec{v}, \vec{w}, \vec{b} - \vec{a})|}{|\vec{v} \times \vec{w}|}$$

b) $\triangle A(\vec{a})B(\vec{b})C(\vec{c})$ im dreidim. Raum
Ges.: Dreiecksfläche F.
Beh.: $F = \frac{1}{2}|(\vec{c} - \vec{a}) \times (\vec{b} - \vec{a})|$

Warum?
Figur-4-3-5-b-Dreiecksfläche

Blickrichtung $\perp ABC$

Zwei Deutungen:

halbe Parallelogrammfläche nach obigem Satz oder

Länge einer Höhe ist $|\vec{c} - \vec{a}| \sin\angle(\vec{c} - \vec{a}, \vec{b} - \vec{a})$

wegen $|(\vec{c} - \vec{a}) \times (\vec{b} - \vec{a})| = |\vec{c} - \vec{a}||\vec{b} - \vec{a})| \sin\angle(\vec{c} - \vec{a}, \vec{b} - \vec{a})$.

c) $\Delta A(\vec{a})B(\vec{b})C(\vec{c})$ in der x_1x_2-**Ebene**
Ges.: Dreiecksfläche F.

Beh.: $F = \frac{1}{2}\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \quad (*)$

Warum?
Einerseits gilt (mit homog. Koord.):

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \vec{a} & \vec{b}-\vec{a} & \vec{c}-\vec{a} \end{pmatrix}$$

$$= \det(\vec{b}-\vec{a}, \vec{c}-\vec{a}) \qquad (**)$$

Andererseits gilt im $x_0x_1x_2$-Koordinaten-System des $\mathbb{R}^3$ nach **b)**

$$F = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} 0 \\ b_1-a_1 \\ b_2-a_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ c_1-a_1 \\ c_2-a_2 \end{pmatrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} \det(\vec{b}-\vec{a}, \vec{c}-\vec{a}) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}|\det(\vec{b}-\vec{a}, \vec{c}-\vec{a})|$$

Anmerkung: (*) liefert eine **orientierte Dreiecksfläche**.
Daher werden die Formeln (*) bzw. (**) oft genutzt.

d) Brennpunkte von Ellipsen

Geg.: Zwei Pkte F_1, F_2, $F_1 \neq F_2$, in der euklid. Ebene
Ges.: Menge aller Pkte $X(x, y)$, für die gilt:

$$\mathrm{d}(X, F_1) + \mathrm{d}(X, F_2) = 2a$$

mit $a \in \mathbb{R}$ fest

Skizze mit kart. xy-KS,
$F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ mit $c > 0$, $X(x, y)$

Notwendig: $2a \geq \mathrm{d}(F_1, F_2)$

$$2a = \mathrm{d}(X, F_1) + \mathrm{d}(X, F_2) =$$

$$= \sqrt{(x-(-c))^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$(2a - \sqrt{(x-(-c))^2 + y^2})^2 = (\sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2$$

$$4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2 =$$

$$= (x-c)^2 + y^2$$

$$4a^2 + 4xc = 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \quad | : 4 \text{ dann } \uparrow 2$$

$$a^4 + 2a^2xc + x^2c^2 = a^2((x+c)^2 + y^2)$$

Weitere Umformung ergibt:

$$a^4 + x^2c^2 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$a^2 \underbrace{(a^2 - c^2)}_{=:b^2} = (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 \quad | : a^2b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Die gesuchte Punktmenge ist eine **Ellipse** e.

Was ist b?

Figur-4-3-5-c-Gärtnerkonstruktion

$a^2 = b^2 + c^2$ (Pythagoras)

b ist die **kleine Halbachse** von e
a ist die **große Halbachse** von e
F_1, F_2 ... **Brennpunkte** von e

Wie gezeigt liefert die **Gärtnerkonstruktion** mit zwei Pflöcken F_1, F_2 und einer von F_1 über X nach F_2 gespannten Schnur der Länge $2a$ Punkte einer Ellipse.

Mitteilung ohne Beweis:

Der Scheitelkrümmungskreis einer Ellipse in einem $\left\{\begin{array}{c}\text{Haupt}\\ \text{Neben}\end{array}\right\}$scheitel hat den Radius $\left\{\begin{array}{c}\frac{b^2}{a}\\ \frac{a^2}{b}\end{array}\right\}$.

Krümmungskreiskonstruktion siehe
Figur-4-3-8-c-Gärtnerkonstruktion
Schritte 10-13

Gedächtnisstütze: Dimension Länge!

Die Außenwinkelhalbierende des Dreiecks $\Delta\, F_1XF_2$ in X ist die Tangente an die Ellipse im Punkt X.