Eigenwerttheorie linearer Abbildungen

Bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems sei im $\mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung beschrieben durch

$$\vec{x}\,' = A\vec{x} \quad \text{mit } n \times n - \text{Matrix } A$$

$\vec{x} \neq \vec{o}$ ist ein **Eigenvektor** (EV) von A zum **Eigenwert** (EW) $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \; A\vec{x} = \lambda\vec{x},\, \vec{x} \neq \vec{o}$$

$$\Leftrightarrow (A - \lambda E)\vec{x} = \vec{o},\, \vec{x} \neq \vec{o} \; (E \text{ Einheitsmatrix})$$

$$\Leftrightarrow p_A(\lambda) := \det(A - \lambda E) = 0$$

d.h. λ ist Nullstelle des **charakteristischen Polynoms** $p_A(\lambda)$ vom Grad n.
Nach dem Hauptsatz der Algebra besitzt $p_A(\lambda) = 0$ über $\mathbb{C}$ in algebraischer Zählung n Lösungen/Eigenwerte λ_1, ..., $\lambda_n \in \mathbb{C}$.
d.h $p_A(\lambda)$ zerfällt über $\mathbb{C}$ in Linearfaktoren:

$$p_A(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n)$$

Zu jedem Eigenwert λ_i liefert

$$(A - \lambda_i E)\vec{x} = \vec{o}$$

mindestens einen Eigenvektor $\vec{x}_i \neq \vec{o}$,
ggf. $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ für $\lambda \in \mathbb{C}$.
Beachte: $p_A(\lambda) = 0$ für $\lambda \in \mathbb{C} \Rightarrow p_A(\overline{\lambda}) = 0$.

Offenbar gilt: $p_A(0) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = det(A)$ und man kann zeigen:
$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = \text{spur}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.
$\det(A) = \det(A^T) \Rightarrow p_A(\lambda) = p_{A^T}(\lambda) \Rightarrow$ A und A^T haben gleiche EW.

Eigenwerte bei Basiswechsel

Nach 3.1.2 erhält man bei Basiswechsel die neuen Koordinaten $\vec{y}$ aus den alten Koordinaten $\vec{x}$ mittels einer linearen Abbildung $\vec{x} = B\vec{y}$ mit einer $n \times n-$Matrix B, $\det(B) \neq 0$, d.h. es existiert B^{-1}.

Aus $\vec{x}\,' = A\vec{x}$ wird bei Basiswechsel
$B\vec{y}\,' = AB\vec{y} \Leftrightarrow \vec{y}\,' = B^{-1}AB\vec{y}$
d.h.: In den neuen Koordinaten ist die lineare Abbildung gegeben durch

$$\vec{y}\,' = C\vec{y} \text{ mit Matrix } C := B^{-1}AB.$$

Behauptung:
C besitzt dieselben Eigenwerte wie A.

Beweis: Ist $\vec{x} \neq \vec{o}$ Eigenvektor von A zum Eigenwert λ, dann gilt für $\vec{x} = B\vec{y}$ bzw. $\vec{y} = B^{-1}\vec{x} \neq \vec{o}$: $\vec{y}\,' = C\vec{y} = B^{-1}AB\vec{y} = B^{-1}ABB^{-1}\vec{x} = B^{-1}A\vec{x} = \lambda B^{-1}\vec{x} = \lambda\vec{y}$.

Folgerung: Bei Basiswechsel gilt:
$p_A(\lambda) = p_C(\lambda)$ und $\text{spur}(A) = \text{spur}(C)$.