Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Dr. H. Vogel

WS 2021/22
Blatt 9

Geometrie für das Lehramt an beruflichen Schulen

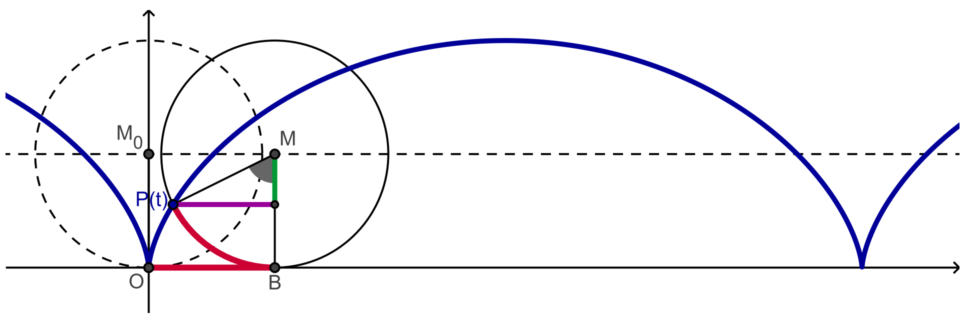
Tutoraufgaben:

T22. Eine Kreisscheibe mit Radius 1 rollt in der xy-Ebene die x-Achse entlang. Die durch einen festen Punkt auf dem Rand der Kreisscheibe beschriebene Kurve c heißt ***Zykloide***. Bestimmen Sie:

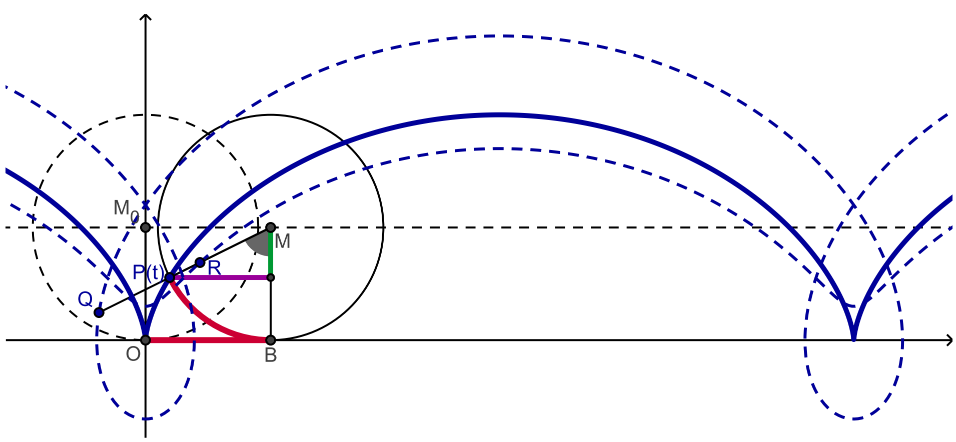
a) eine Parameterdarstellung von c,

b) die singulären Punkte von c,

c) die Länge von c zwischen zwei benachbarten singulären Punkten.



Zusatz: Punkte Q, R, die fest mit dem Kreis verbunden sind, beschreiben bei der Rollbewegung ***verkürzte bzw. verlängerte Zykloiden***, wenn ihr Abstand vom Kreismittelpunkt M kleiner oder größer als der Kreisradius 1 ist.



Begründen Sie, warum diese Zykloiden keine singulären Stellen haben.

T23. Gegeben sei die Parameterdarstellung einer ebenen C^∞−Kurve durch:

$$c: \vec{x}(u) = \left(\frac{1-u^2}{1+u^2}, \frac{u-u^3}{1+u^2}\right)^T, \quad u \in \mathbb{R}.$$

a) Untersuchen Sie c auf singuläre Stellen und Doppelpunkte.

b) Skizzieren Sie den Verlauf von c.

c) Zeigen Sie, dass $f: \left\{ \begin{array}{ccc}]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[& \to & \mathbb{R} \\ v & \mapsto & u = f(v) := \tan v \end{array} \right.$ eine zulässige Parametertransformation von c ist. Geben Sie die neue Parameterdarstellung von c an.

Hausaufgaben:

H21. Zeigen Sie allgemein für $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ und $t = f(u)$:

a) Die Ableitung von $(\dot{\vec{x}}(t))^2$ nach t ist $2\,\dot{\vec{x}}(t) \cdot \ddot{\vec{x}}(t)$.

b) Die Komposition $\vec{y}(u) := \vec{x}(f(u))$ ist 3-mal stetig nach u differenzierbar, wenn $\vec{x}$ und f 3-mal stetig differenzierbar sind. Geben Sie dazu die ersten drei Ableitungen von $\vec{y}$ nach u mit Hilfe der Ableitungen von $\vec{x}$ und f an.

H22. Eine Kettenlinie kann durch $c: \ \vec{x}(t) = (t\,,\,\cosh t)^T\,, \ \ t \in \mathbb{R}$ parametrisiert werden.

Bestimmen Sie die Bogenlänge $s = s(t)$ von c von $\vec{x}(0)$ bis $\vec{x}(t)$ und stellen Sie c in Abhängigkeit der Bogenlänge s dar.