

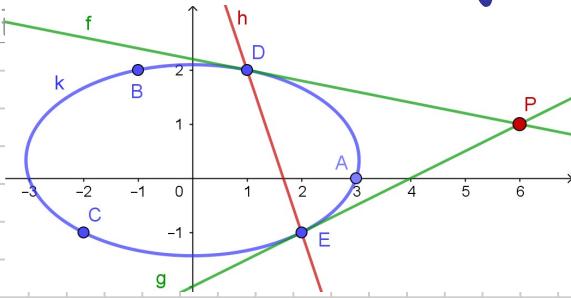
Geometrie LB

Übungen Blatt 8

19.11.2020

Notiztitel

T201
a)



$$k: x^2 + 3y^2 - 2y = 9 \quad (1) \text{ (affin)}$$

$$x = \frac{x_1}{x_0}, \quad y = \frac{y_1}{x_0} \quad (TF)$$

Schnittpkte D, E von h mit k durch Einsetzen (2) in (1)

b) $f = PD, g = PE$ sind die Tangenten von P an k

Bepr: Nach Obr. sind die Polaren von D, E (EK) die Tgtn von k in D, E

Wegen $D, E \in h$ enthalten diese den Pol P von h. (Satz 12.1!)

Probe: um f : $\vec{f} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} \quad (D)$

um g : $\vec{g} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (E)$

$\left. \begin{matrix} \vec{f} \\ \vec{g} \end{matrix} \right\} \begin{pmatrix} 11 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ -84 \\ -14 \end{pmatrix} = -14 \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (P)$

c) $H(x, y) =$

(nicht normierte HNF!)

$H(P) =$

$H(A) =$

$H(B) =$

$H(C) =$

D, E ... Eigenschaftengrenze

Beachte: Urteil gegenüber:

Schnaide PA mit k und

prüfe, welcher Schnittpkt näher zu P liegt.

T21 $\vec{s} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$, S skew/sym Matrix mit $S\vec{x} = \vec{s} \times \vec{x}$ (0)

euklidisch!

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{s} \times \vec{x} = \begin{pmatrix} s_2 x_3 - s_3 x_2 \\ s_3 x_1 - s_1 x_3 \\ s_1 x_2 - s_2 x_1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{S^T} = \underline{-S} \Rightarrow S \text{ ist skew/symmetrisch.}$$

a) Zeige $E-S$ ist regulär:

Bew 1: (algebraisch/rechnerisch) $E-S$ regulär $\Leftrightarrow \det(E-S) \neq 0$

$$\underline{\det(E-S)} =$$

Bew 2: (vektoriell) $E-S$ regulär $\Leftrightarrow [(E-S)\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}]$

$$\text{Sei } \vec{0} = (E-S)\vec{x} = E\vec{x} - S\vec{x} = \vec{x} - \vec{s} \times \vec{x} \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{s} \times \vec{x} \quad (*)$$

$$\text{Andererseits gilt } \vec{x} \perp \vec{s} \times \vec{x} \Rightarrow (*) \vec{x} \perp \vec{x} \Rightarrow \vec{x} = \vec{0} \quad \checkmark$$

Bew 3: Variante zu Bew 2:

$$\text{Sei } \vec{0} = (E-S)\vec{x} = E\vec{x} - S\vec{x} = \vec{x} - \vec{s} \times \vec{x} \quad | \cdot \vec{x} \quad (\text{Skalarprod})$$

$$\Rightarrow 0 = \vec{x} \cdot \vec{x} - \underbrace{(\vec{s} \times \vec{x}) \cdot \vec{x}}_{=0} \Leftrightarrow \vec{x} \cdot \vec{x} = 0 \Rightarrow \vec{x} = \vec{0} \quad \checkmark$$

b) Zeige $U := (E-S)^{-1}(E+S)$ ist Drehmatrix, d.h. $UU^T = E$ ①
 $\det U = 1$ ②

① $UU^T =$

$$(A \cdot B)^T = B^T A^T$$

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$$

$$\text{NR: } (E+S)^T = \begin{pmatrix} E^T & S^T \\ E & -S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & -S \\ E & -S \end{pmatrix} = E - S \quad \text{und} \quad (E-S)^T = \begin{pmatrix} E^T & -S^T \\ E & -S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & -S \\ E & -S \end{pmatrix} = E + S$$

$$\text{NR: } (E+S)(E-S) = E \cdot E + \underbrace{S \cdot E}_{=E \cdot S} - \underbrace{E \cdot S}_{=S \cdot E} - S \cdot S = (E-S)(E+S)$$

Determinantenmultiplikationssatz

$$\textcircled{2} \det(U) = \det[(E-S)^{-1}(E+S)] =$$

alternativ mit (1)

$$\det(E-S) = 1 + |\vec{s}|^2 \text{ und } \det(E+S) = \det(E-(-S)) = 1 + |-\vec{s}|^2 = 1 + |\vec{s}|^2$$

c) Drehachse? gesucht $\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ mit $U\vec{x} = \vec{x}$

$$\Leftrightarrow (E-S)^{-1}(E+S)\vec{x} = \vec{x} \Leftrightarrow$$

d.h. \vec{s} ist (nichtorient.) Richtung der Drehachse!

Drehwinkel φ :

Da die Abbildung geometrisch definiert ist, also unabhängig vom Koord. system, dürfen wir das Koord. system so wählen, dass die z-Drehung in Richtung von \vec{s} zeigt, d.h. $\vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ s \end{pmatrix}, s > 0$

$$\Rightarrow E+S = \begin{pmatrix} 1 & -s & 0 \\ s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E-S = \begin{pmatrix} 1 & s & 0 \\ -s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (E-S)^{-1} = \frac{1}{1+s^2} \begin{pmatrix} 1 & -s & 0 \\ s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+s^2 \end{pmatrix} \quad \text{Beachte: } \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma} \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow U = (E-S)^{-1}(E+S) = \frac{1}{1+s^2} \begin{pmatrix} 1 & -s & 0 \\ s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+s^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -s & 0 \\ s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{1+s^2} \begin{pmatrix} 1-s^2 & -2s & 0 \\ 2s & 1-s^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1+s^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{\cos\varphi = \frac{1-s^2}{1+s^2}}, \quad \underline{\sin\varphi = \frac{2s}{1+s^2}} \quad (*) \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \text{Drehmatrixe} \\ \text{um z-Drehung} \end{matrix}$$

d.h. Der Betrag s von \vec{s} liefert mit (*) den Drehwinkel φ !

(Unabhängig vom Koordinatensystem!)

$$\text{alternativ } \cos\delta = \frac{\text{spur } U - 1}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{3-s^2}{1+s^2} - 1 \right) = \frac{1-s^2}{1+s^2}$$

Zusatz: Man kann zeigen, dass $\tan \frac{\varphi}{2} = |\vec{s}|$ gilt:

Betrachte $\varphi = 2\varepsilon$ so gilt

$$\cos \varphi = \cos 2\varepsilon = \cos^2 \varepsilon - \sin^2 \varepsilon \stackrel{\text{(*)}}{=} 2 \cos^2 \varepsilon - 1 \stackrel{\text{(*)}}{=} \frac{1-s^2}{1+s^2}$$

$$\Rightarrow \cos^2 \varepsilon = \frac{1}{2} \left(\frac{1-s^2}{1+s^2} + 1 \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1+s^2} = \frac{1}{1+s^2} \quad \textcircled{1}$$

$$\sin \varphi = \sin 2\varepsilon = 2 \sin \varepsilon \cos \varepsilon \stackrel{\text{(*)}}{=} \frac{2s}{1+s^2} \Rightarrow \sin \varepsilon \cos \varepsilon = \frac{s}{1+s^2} \quad \textcircled{2}$$

$$\Rightarrow \tan \varepsilon = \frac{\sin \varepsilon}{\cos \varepsilon} = \frac{\sin \varepsilon \cos \varepsilon}{\cos^2 \varepsilon} = s \quad (\text{Länge des Vektors } \vec{s})$$

Grafik 2

$$\vec{s} = d \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow S = d \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

mit $S\vec{x} = \vec{s} \times \vec{x}$

$$U = (S - E)^{-1}(S + E) = \begin{pmatrix} -0.73 & -0.13 & 0.67 \\ 0.67 & -0.33 & 0.67 \\ 0.13 & 0.93 & 0.33 \end{pmatrix}$$

U ist Drehmatrix

Probe: $U \cdot U^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\det(U) = 1$

mit Drehachse a in Richtung \vec{s} und Drehwinkel φ

$$\cos(\varphi) = \frac{1 - (\vec{s})^2}{1 + (\vec{s})^2} = \frac{1 - 14d^2}{1 + 14d^2} = -0.87$$

d = 1

φ = 150.07°

setze Winkel 60°

setze Winkel 90°

setze Winkel 120°

3D Grafik