Geometrie LB Übungen Blatt 4

Notiztitel 24.10.2014

T9. <u>Zu zeigen:</u> Im proj. abg. eukl. Raum gibt es zu einem Punkt P und einer Geraden g mit $P \notin g$ <u>eine</u> Ebene ε mit $P \in \varepsilon \wedge g \subset \varepsilon$.

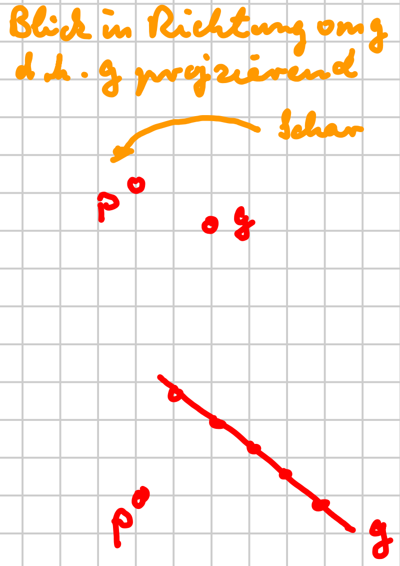
Zum besseren Verständnis machen wir eine Fallunterscheidung:

Punkt P ist $\begin{cases} \text{eigentlich} \\ \text{Fernpunkt} \end{cases}$ und Gerade g ist $\begin{cases} \text{eigentlich} \\ \text{uneigentlich} \end{cases}$,

betrachten also folgende 4 Fälle:

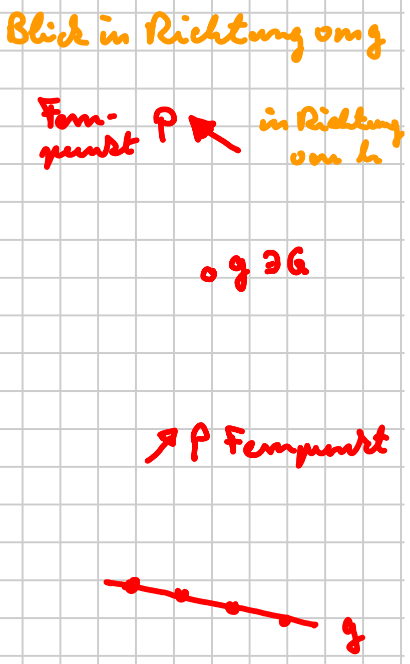
<u>1. Fall: P und g eigentlich:</u>

$\varepsilon = Pg$ in Schar von Ebenen



$\varepsilon = Pg$ erzeugt von Geraden

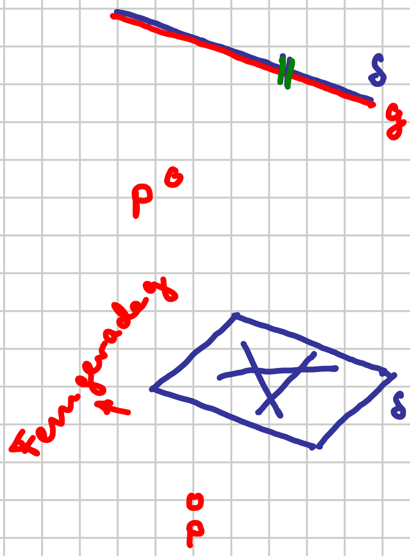
<u>2. Fall: P Fernpunkt und g eigentlich:</u>



Im Fall $h \parallel g$ wäre $h \cap g$ der Fernpunkt P ↯ zu $P \notin g$

3. Fall: P eigentlich und g Ferngerade:

ε von der Seite, d.h. projizierend betrachtet



4. Fall: P Fernpunkt und g Ferngerade:

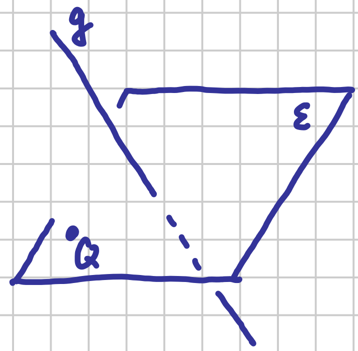
$\Rightarrow$

T10. Gegeben: Gerade g und Ebene ε des proj. abg. eukl. Raumes

Zu zeigen: $g \cap \varepsilon \neq \emptyset$ (Schnitt ist nicht leer?)

Fall 1:

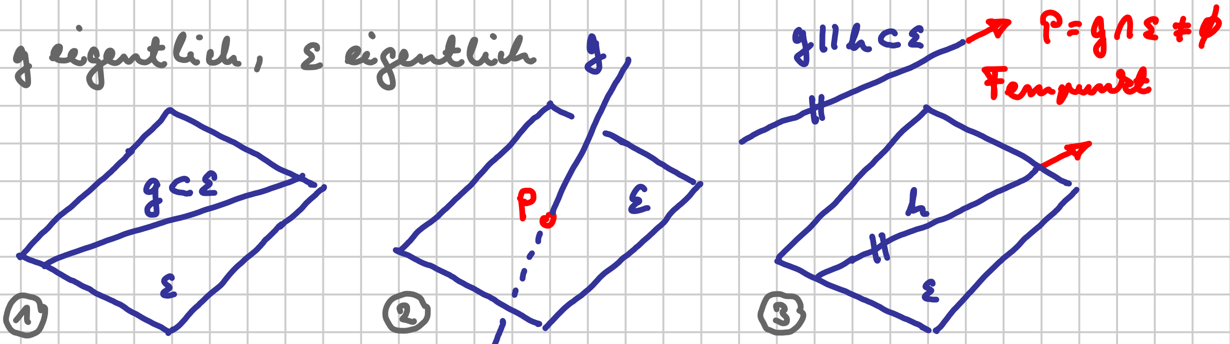
Fall 2:



Diese Aussage gilt im proj. abg. eukl. Raum allgemein, ohne sie für unterschiedliche Lagen von g und ε einzeln begründen zu müssen

Unter der Voraussetzung $g \not\subset \varepsilon$ gilt stets $\boxed{g \cap \varepsilon = P}$ eindeutig

- g eigentlich, ε eigentlich



$g \cap \varepsilon = g \neq \emptyset$ $\quad$ $g \cap \varepsilon = P \neq \emptyset$ $\quad$ ($g \parallel \varepsilon \Leftrightarrow \exists\, h \subset \varepsilon$ mit $h \parallel g$)

- g uneigentlich = Ferngerade, ε eigentlich mit Ferngerade e

In der Fernebene gilt: (1) $g = e \Rightarrow g \subset \varepsilon$ und $g \cap \varepsilon = g \neq \emptyset$

(2) $g \neq e \Rightarrow P = g \cap e = g \cap \varepsilon \neq \emptyset$ ist ein Fernpunkt

g ist Ferngerade einer Schar par. Ebenen zu einer Ebene γ, die die Ebene ε in einer Schar par. Geraden mit Fernpunkt P schneidet

- g eigentlich mit Fernpunkt G, ε uneigentlich = Fernebene

$\Rightarrow P = G = g \cap \varepsilon \neq \emptyset$ ist der Fernpunkt von g

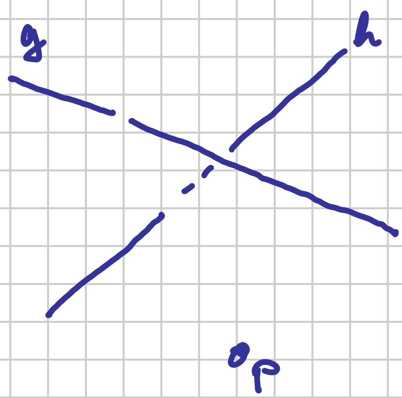
- g uneigentlich = Ferngerade, ε uneigentlich = Fernebene

$\Rightarrow g \cap \varepsilon = g \neq \emptyset$ in der Fernebene. $(\exists\, P = g \cap h \Rightarrow \exists\, \varepsilon = gh)$

T11. Gegeben: Windschiefe Geraden g, h im proj. abg. eukl. Raum: $g \cap h = \emptyset$

und Punkt $P \notin g \cup h$, d.h. $P \notin g$ und $P \notin h$. $(g \parallel h \Rightarrow \exists\, F = g \cap h)$

Zu zeigen: Es gibt genau eine Gerade k mit $P \in k$, $k \cap g \neq \emptyset$, $k \cap h \neq \emptyset$



(Wäre $h \subset \gamma$, so gäbe es in γ einen Schnitt $g \cap h$ ↯ zur Voraus.)

(Wäre $g = PH \Rightarrow P \in g$ ↯ zur Voraus)

(Umgekehrt könnte man $\boxed{\eta = Ph} \Rightarrow g \cap \eta = G$ und $PG \cap h = H$ betrachten)

Wegen $k = PH \subset \boxed{\eta = Ph}$ gilt: $\boxed{k = Pg \cap Ph}$ ist eindeutig bestimmt

Die Aussage gilt auch im Fall, dass $h \parallel Pg = \gamma$ oder $g \parallel Ph = \eta$ liegt.