Technische Universität München
Zentrum Mathematik

Prof. Dr. Dr. Jürgen Richter-Gebert
Lena Polke, Michael Strobel

Geometriekalküle WS 2019/20

https://geo.ma.tum.de/de/lehre/geometriekalkuele.html

Aufgabenblatt 5 (2019–12–16)

Level 0

Aufgabe 1. Grundlagen.

(a) Finden Sie eine Klasse von Matrizen, die nie Kegelschnitte darstellen kann.

(b) Die Punkte A bis E definieren einen Kegelschnitt, der durch eine Matrix M repräsentiert werden kann. Bestimmen Sie diese Matrix. Geben Sie zunächst Ihren Ansatz an, und berechnen Sie dann das Ergebnis.

$$A = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$$

(c) Gegeben seien die homogenen Koordinaten eines endlichen Punktes in $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$:

$$\begin{pmatrix}a+bi\\c+di\end{pmatrix} \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

– Geben Sie die homogenen Koordinaten des entsprechenden Punktes in $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ an. Verwenden Sie dazu nur Additionen, Subtraktionen und Multiplikationen, ausgehend von den vier oben angegebenen reellen Zahlen.

– Was ist das Ergebnis dieser Abbildung, wenn die Eingabe den unendlich fernen Punkt in $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ beschreibt?

Aufgabe 2. Dualisieren und Doppelverhältnis.

Es gilt der folgende Satz:

> *Gegeben seien zwei verschiedenen Geraden g und h in der rellen projektiven Ebene $\mathbb{RP}^2$ und ein Punkt Z, der weder auf g noch auf h liege. Vier paarweise verschiedene Geraden z_1, z_2, z_3, z_4 durch den Punkt Z schneiden die beiden Geraden g bzw. h in je vier Punkten G_1, G_2, G_3, G_4 bzw. H_1, H_2, H_3, H_4, und für die beiden Doppelverhältnisse $(G_1, G_2; G_3, G_4)$ und $(H_1, H_2; H_3, H_4)$ gilt:*
>
> $$(G_1, G_2; G_3, G_4) = (H_1, H_2; H_3, H_4)$$

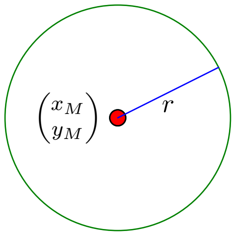
a) Fertigen Sie eine Skizze zu diesem Satz an.

b) Dualisieren Sie diesen Satz.

c) Beweisen Sie diesen Satz.

Aufgabe 3. Kreis als Quadrik.

Berechnen Sie die symmetrische Matrix in $\mathbb{R}^{3\times 3}$, die einen Kreis mit Mittelpunkt $(x_M, y_M)^T$ und Radius r als Quadrik beschreibt.



Aufgabe 4. Sechs Punkte auf einem Kegelschnitt.

Es seien fünf Punkte $P_1, \ldots, P_5$ im $\mathbb{RP}^2$ gegeben. Sie bestimmen im Allgemeinen einen Kegelschnitt

$$C = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{RP}^2 \mid a \cdot x^2 + b \cdot y^2 + c \cdot z^2 + d \cdot xy + e \cdot yz + f \cdot xz = 0\}.$$

Zeigen Sie, dass ein Punkt P_6 genau dann auf C liegt, wenn

$$\det \begin{pmatrix} x_1^2 & y_1^2 & z_1^2 & x_1y_1 & y_1z_1 & x_1z_1 \\ x_2^2 & y_2^2 & z_2^2 & x_2y_2 & y_2z_2 & x_2z_2 \\ x_3^2 & y_3^2 & z_3^2 & x_3y_3 & y_3z_3 & x_3z_3 \\ x_4^2 & y_4^2 & z_4^2 & x_4y_4 & y_4z_4 & x_4z_4 \\ x_5^2 & y_5^2 & z_5^2 & x_5y_5 & y_5z_5 & x_5z_5 \\ x_6^2 & y_6^2 & z_6^2 & x_6y_6 & y_6z_6 & x_6z_6 \end{pmatrix} = 0$$

Aufgabe 5. Kegelschnitte und Tangenten.

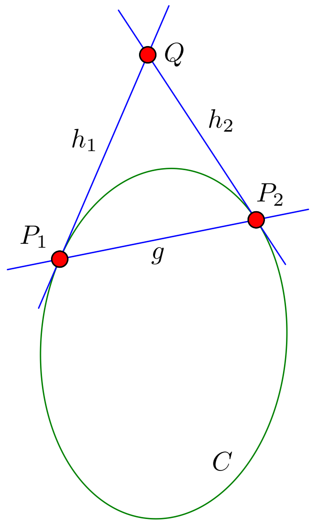
Gegeben sei ein nicht degenerierter Kegelschnitt C, der durch eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ beschrieben wird:

$$C = \{p \in \mathbb{RP}^2 \,|\, p^T \cdot A \cdot p = 0\}$$

a) Zeigen Sie, dass $h = A \cdot p$ die Tangente an einen Punkt p auf C ist.

b) Finden Sie zu einer Tangente h an C, deren homogene Koordinaten gegeben seien, den Berührpunkt p.

c) Betrachten Sie nebenstehende Konstruktion. Gegeben sei der Kegelschnitt C sowie ein Punkt Q. Die **Polare** g von Q bezüglich C lässt sich wie abgebildet definieren: Man legt von Q aus die Tangenten h_1 und h_2 an C, bestimmt die Berührpunkte P_1 und P_2 und verbindet diese um g zu erhalten. Entwickeln Sie eine möglichst einfache, geschlossene Formel, um die Polare aus C und Q zu berechnen.



Aufgabe 6. Mengen in $\mathbb{CP}^1$.

In den einzelnen Teilaufgaben sind Punktmengen in $\mathbb{CP}^1$ angegeben.

- Zeichnen Sie diese (soweit möglich) in das unten abgebildete Koordinatensystem ein, und beschriften Sie diese deutlich.
- Wenn eine Menge aus endlich vielen Punkten besteht, so geben Sie diese zusätzlich explizit als Aufzählung mithilfe von (homogenen) Koordinatenvektoren an.
- Sie müssen Ihre Ergebnisse nicht begründen.

a) $$A = \left\{ P \in \mathbb{CP}^1 \,\middle|\, p^T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \text{ für alle Repräsentanten } p \text{ des Punktes } P \right\} \subseteq \mathbb{CP}^1$$

b) $$B = \left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2+2i \\ -1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\} \right\} \subseteq \mathbb{CP}^1$$

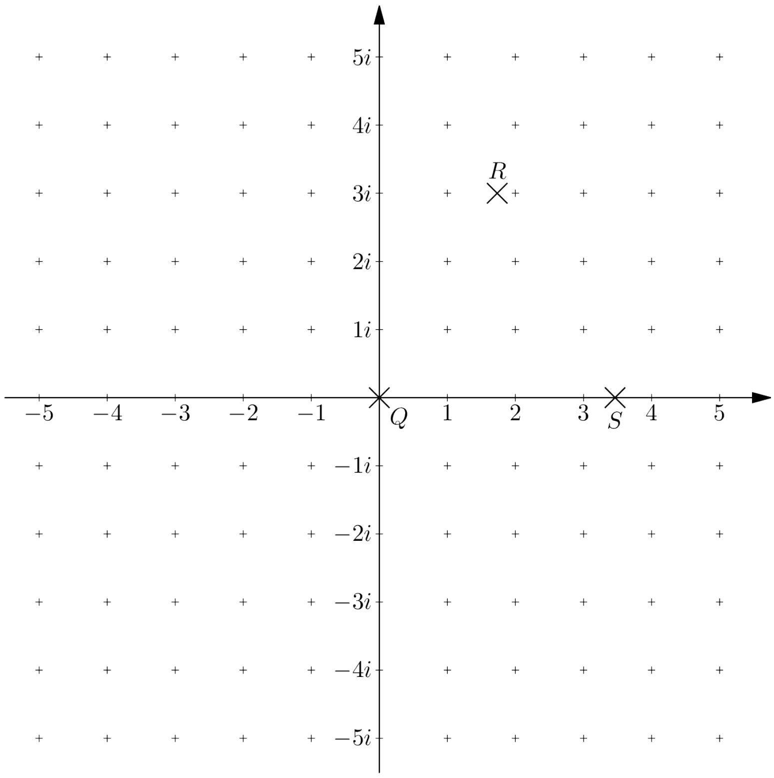
c) $$C = \left\{ P \in \mathbb{CP}^1 \,\middle|\, \left(P, \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{CP}^1$$

d) $$D = \{P \in \mathbb{CP}^1 \,|\, (P, Q; R, S) = (P, R; S, Q)\} \subseteq \mathbb{CP}^1 \qquad \text{mit } Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} \sqrt{3}+3i \\ 1 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Punkte Q bis S sind bereits in das Koordinatensystem eingezeichnet. Sie bilden ein gleichseitiges Dreieck.

Hinweise:

- Das Koordinatensystem stellt die Standardeinbettung von $\mathbb{CP}^1$ dar, also mit $y = 1$.
- $\mathbb{CP}^1$ Bezeichnet in den Formeln dieser Aufgabe die *Menge aller Punkte* der komplexen projektiven Gerade.


R
Q
S
−5
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
5
5i
4i
3i
2i
1i
−1i
−2i
−3i
−4i
−5i