Zu 1.6.2 Axiomatik nach Karzel

Eine moderne Axiomatik der euklidischen Geometrie findet man zum Beispiel in dem Buch "Einführung in die Geometrie" von Helmut Karzel, Kay Sörensen und Dirk Windelberg, Vandenhoeck & Ruprecht in Göttingen, 1973. Es werden schrittweise weitere Axiome eingeführt und die dadurch beschriebenen Strukturen immer spezieller. Einige der Axiome lauten so:

Es seien P eine Menge, deren Elemente wir **Punkte**, und $\mathfrak{G}$ eine Teilmenge der Potenzmenge $\mathfrak{P}(P)$ von P, deren Elemente wir **Geraden** nennen. Das Paar (P, $\mathfrak{G}$) heißt **Inzidenzraum**, wenn folgende Axiome gelten:

I 1 Zu $x, y \in P$ mit $x \neq y$ gibt es genau ein $G \in \mathfrak{G}$ mit $x, y \in G$.

I 2 Für alle $G \in \mathfrak{G}$ gilt $|G| \geq 2$.

Ein Inzidenzraum $(E, \mathfrak{G})$ heißt **affine Ebene**, wenn gilt:

E 1 Es gibt drei nicht-kollineare Punkte.

P (Parallelenaxiom)
Zu jedem Paar $(x, G) \in E \times \mathfrak{G}$ mit $x \notin G$ gibt es genau ein $H \in \mathfrak{G}$ mit $x \in H$ und $G \cap H = \emptyset$.

Beispiele für Inzidenzräume / affine Ebenen

1) $\mathbb{R}^2$ ist eine affine Ebene

Menge der Punkte:

$P = \mathbb{R}^2 = \{x := (x_1, x_2) \mid x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2\}$

Menge der Geraden:

$\mathfrak{G} = \{x + \lambda r \mid x,\ r \in \mathbb{R}^2,\ r \neq (0,0),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$
$\quad \subseteq \mathfrak{P}(P)$

$(P, \mathfrak{G})$ ist ein Inzidenzraum, denn:

(I1) Zu zwei Punkten $x, y \in P$ mit $x \neq y$
$\exists_1$ eine Gerade $G : x + \lambda(y - x) \in \mathfrak{G}$
mit $x \in G$ für $\lambda = 0$ und $y \in G$ für $\lambda = 1$

(I2) $|G| = \infty \geq 2\ \forall\ G \in \mathfrak{G}$.

Alle Geraden enthalten unendlich viele Punkte

$(P, \mathfrak{G})$ ist sogar eine affine Ebene, denn:

(E1) $\exists\ z \in P$ mit $z \notin G : x + \lambda(y - x)$

Wähle z so, dass $z - x,\ y - x$ linear unabhängig sind (*).

(P) Zu $z \notin G : x + \lambda(y - x)\ \ \exists_1$ eine Gerade $H : z + \mu(y - x)$ mit $z \in H$ und $G \cap H = \emptyset$.

Beachte: $H = H' = z' + \mu r'$ mit $z' = z + \lambda(y - x),\ r = \tau(y - x)$

und $G \cap H = \emptyset$, da $x + \lambda(y - x) = z + \mu(y - x) \quad \Leftrightarrow$

$(\lambda - \mu)(y - x) = z - x$ wegen (*) unlösbar ist

2) Kleinste affine Ebene mit 4 Punkten

Punktmenge: $P = \{a, b, c, d\},\ |P| = 4$

a, b, c, d z.B. Namen der Ecken eines allgem. Vierecks oder der vier Monome 1, x, x^2, x^3 oder der 4 Matrizen

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$

Betrachte die Geradenmenge $\subseteq \mathfrak{P}(P)$:

$\mathfrak{G} = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}\}$

(P, $\mathfrak{G}$) ist ein Inzidenzraum, denn:

(I1) Jedes Paar $\{x, y\} \in P \times P$ mit $x \neq y$ bildet genau eine Gerade in $\mathfrak{G}$.

(I2) $|G| = 2 \geq 2\ \ \forall\ \ G \in \mathfrak{G}$.

(P, $\mathfrak{G}$) ist sogar eine affine Ebene, denn:

(E1) a, b, c nicht kollinear, da $c \notin \{a, b\}$

(P) Zu $z \notin G = \{x, y\}$ ist $H = \{z, w\}$ mit $w \in P \backslash \{x, y, z\}$ die einzige Parallele mit $z \in H$ und $\{x, y\} \cap \{z, w\} = \emptyset$.

Zu $c \notin \{a, b\}$ ist $\{c, d\}$ die eindeutige Parallele, da

$\{a, b\} \cap \{c, d\} = \emptyset,\ \ \{a, b\} \cap \{a, c\} = \{a\},\ \ \{a, b\} \cap \{b, c\} = \{b\}$

Es gilt: $\{a, b\} \| \{c, d\},\ \{a, c\} \| \{b, d\},\ \{a, d\} \| \{b, c\}$

Bem.: Die dreielementigen Teilmengen $\overline{\mathfrak{G}} = \{\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}\} \subseteq \mathfrak{P}(P)$ erfüllen (I2) $|G| = 3 \geq 2\ \forall\ G$ aber nicht (I1), da zu a, b in $\mathfrak{G}$ zwei verschiedene Verbindungsgeraden $\{a, b, c\} \neq \{a, b, d\}$ existieren.

Eine affine Ebene $(E, \mathfrak{G})$ heißt **desarguesch**, wenn in ihr das **affine Axiom von Desargues AD** erfüllt ist:

AD Es seien G_1, G_2, G_3 drei verschiedene Geraden, die mit einem Punkt z inzidieren. Für $i \in \{1, 2, 3\}$ seien a_i, b_i sechs verschiedene Punkte mit $a_i, b_i \in G_i$. Dann folgt aus $\overline{a_1, a_2} || \overline{b_1, b_2}$ und $\overline{a_2, a_3} || \overline{b_2, b_3}$ auch $\overline{a_1, a_3} || \overline{b_1, b_3}$.

Siehe Figur-1-6-2-Desargues-Karzel

Eine affine Ebene $(E, \mathfrak{G})$ heißt **pappussch**, wenn sie dem **affinen Axiom von Pappus AP** genügt:

AP Es seien G_1, G_2 zwei verschiedene Geraden und $a_1, a_2, \ldots, a_6$ sechs verschiedene Punkte mit $a_1, a_3, a_5 \in G_1 \setminus G_2$ und $a_2, a_4, a_6 \in G_2 \setminus G_1$. Dann folgt aus $\overline{a_1, a_2} || \overline{a_4, a_5}$ und $\overline{a_2, a_3} || \overline{a_5, a_6}$ auch $\overline{a_3, a_4} || \overline{a_6, a_1}$.

Siehe Figur-1-6-2-Pappus-Karzel

Ein Inzidenzraum $(P, \mathfrak{G})$ heißt **affiner Raum**, wenn jede Ebene von $(P, \mathfrak{G})$ eine affine Ebene ist und wenn $||$ transitiv ist.