Geometrie LB Übungen Blatt 4

Notiztitel 24.10.2014

T9. <u>Zu zeigen:</u> Im proj. abg. eukl. Raum gibt es zu einem Punkt P und einer Geraden g mit $P \notin g$ <u>eine</u> Ebene ε mit $P \in \varepsilon \wedge g \subset \varepsilon$.

Zum besseren Verständnis machen wir eine Fallunterscheidung:

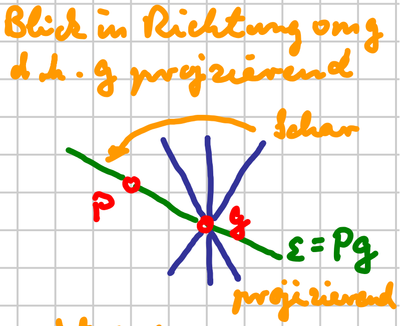
Punkt P ist $\begin{cases} \text{eigentlich} \\ \text{Fernpunkt} \end{cases}$ und Gerade g ist $\begin{cases} \text{eigentlich} \\ \text{uneigentlich} \end{cases}$,

betrachten also folgende 4 Fälle:

<u>1. Fall: P und g eigentlich:</u>

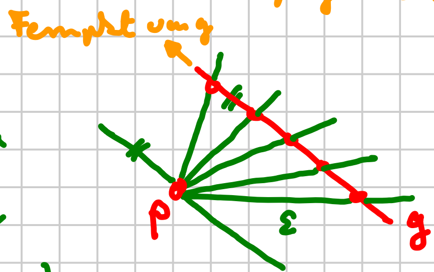
$\varepsilon = Pg$ in Schar von Ebenen

Betrachte alle Ebenen, die g enthalten. In dieser Schar gibt es genau eine, die neben g auch P enthält.



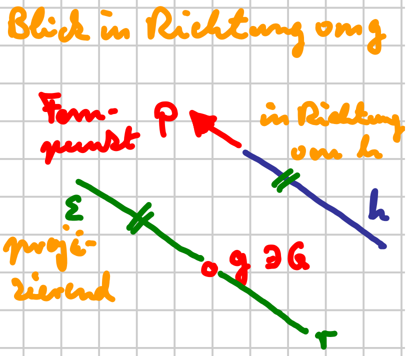
$\varepsilon = Pg$ erzeugt von Geraden

Die Verbindungsebene $\varepsilon = Pg$ wird erzeugt durch die Verbindungsgeraden von P zu allen Punkten von g <u>und</u> die Parallele zu g durch P (Verb.gerade von P zum Fernpkt von g)

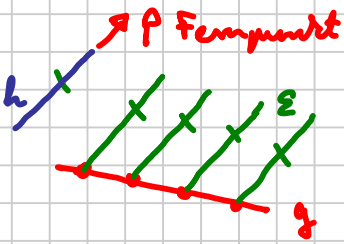


<u>2. Fall: P Fernpunkt und g eigentlich:</u>

P ist Fernpunkt (Schnittpunkt) aller paralleler Geraden zu einer Geraden h. Wähle durch einen Punkt $G \in g$ <u>die</u> Parallele r zu h. Dann spannen g und r eine Ebene auf, die g und P enthält (Beachte: $h \not\parallel g$!)



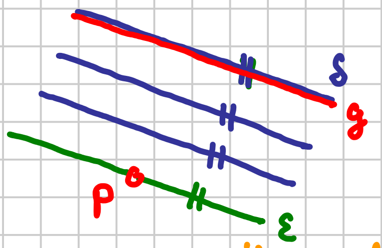
Die Verbindungsebene $\varepsilon = Pg$ wird erzeugt durch die Parallelen zu h durch alle Punkte von g. (Verb.geraden der Punkte von g mit P)



Im Fall $h \parallel g$ wäre $h \cap g$ der Fernpunkt P ↯ zu $P \notin g$

3. Fall: P eigentlich und g Ferngerade:

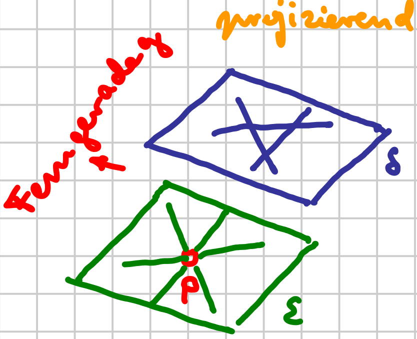
δ von der Seite, d.h. projizierend betrachtet



Schnittgerade

g ist Ferngerade aller parallelen Ebenen zu einer Ebene δ. In dieser Parallelenschar gibt es genau eine, die P und die Ferngerade g enthält.

Die Verbindungsebene $\varepsilon = Pg$ wird erzeugt durch die Parallelen zu allen Geraden von δ durch P (Verb.geraden von P mit den Punkten von g)



4. Fall: P Fernpunkt und g Ferngerade:

$\Rightarrow$ $\varepsilon = Pg$ ist die Fernebene des proj. abg. eukl. Raumes.

T10. Gegeben: Gerade g und Ebene ε des proj. abg. eukl. Raumes

Zu zeigen: $g \cap \varepsilon \neq \emptyset$ (Schnitt ist nicht leer?)

Fall 1: $g \subset \varepsilon \Rightarrow g \cap \varepsilon = g \neq \emptyset$ klar!

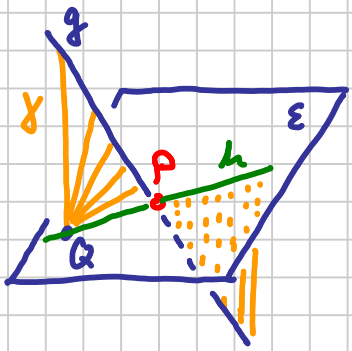
Fall 2: $g \not\subset \varepsilon \Rightarrow$ Es gibt (mind.) einen Punkt $Q \in \varepsilon$ mit $Q \notin g$

T9.
$\Rightarrow$ Es gibt eine Ebene $\gamma = Qg$ $(\neq \varepsilon)$

$\Rightarrow$ Es gibt die Schnittgerade $h = \gamma \cap \varepsilon$

$\Rightarrow$ Die beiden Geraden h und g $(\subset \gamma)$ schneiden einander in der Ebene γ in einem Punkt $P = h \cap g$ und es gilt:

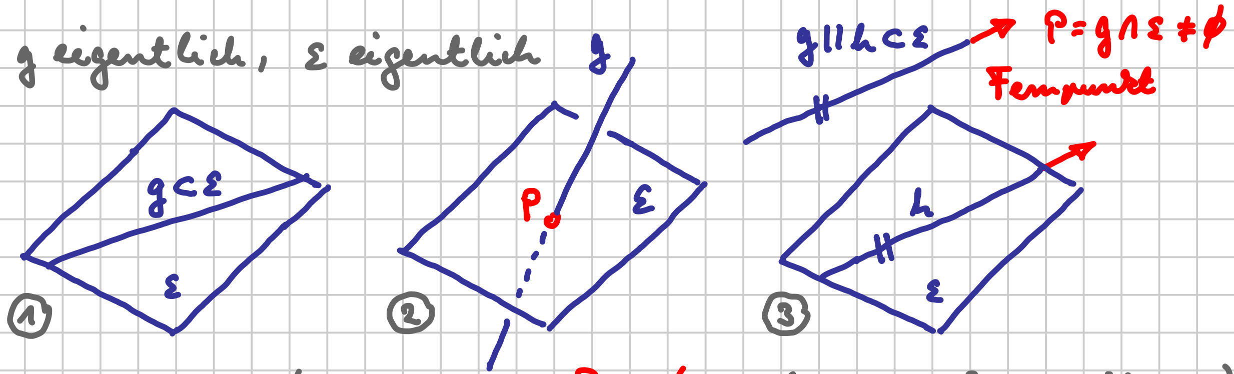
$$\text{gilt:}\left\{\begin{array}{l} ①\ P \in h \subset \varepsilon,\ \text{d.h. } P \in \varepsilon \\ ②\ P \in g \end{array}\right\} \Rightarrow P = g \cap \varepsilon \neq \emptyset$$



Diese Aussage gilt im proj. abg. eukl. Raum allgemein, ohne sie für unterschiedliche Lagen von g und ε einzeln begründen zu müssen

Unter der Voraussetzung $g \not\subset \varepsilon$ gilt stets $\boxed{g \cap \varepsilon = P}$ eindeutig

• g eigentlich, ε eigentlich



$g \cap \varepsilon = g \neq \emptyset$ $\quad$ $g \cap \varepsilon = P \neq \emptyset$ $\quad$ ($g \parallel \varepsilon \Leftrightarrow \exists\, h \subset \varepsilon$ mit $h \parallel g$)

• g uneigentlich = Ferngerade, ε eigentlich mit Ferngerade e

In der Fernebene gilt: ① $g = e \Rightarrow g \subset \varepsilon$ und $g \cap \varepsilon = g \neq \emptyset$

② $g \neq e \Rightarrow P = g \cap e = g \cap \varepsilon \neq \emptyset$ ist ein Fernpunkt

g ist Ferngerade einer Schar par. Ebenen zu einer Ebene γ, die die Ebene ε in einer Schar par. Geraden mit Fernpunkt P schneidet

• g eigentlich mit Fernpunkt G, ε uneigentlich = Fernebene

$\Rightarrow P = G = g \cap \varepsilon \neq \emptyset$ ist der Fernpunkt von g

• g uneigentlich = Ferngerade, ε uneigentlich = Fernebene

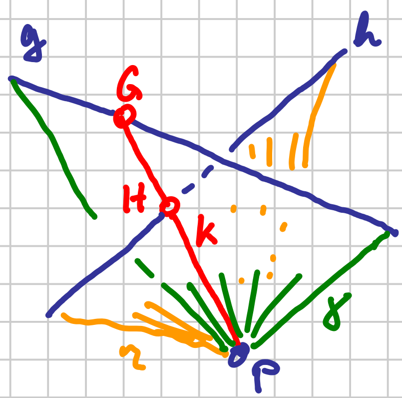
$\Rightarrow g \cap \varepsilon = g \neq \emptyset$ in der Fernebene. $\quad$ ($\exists\, P = g \cap h \Rightarrow \exists\, \varepsilon = gh$)

T11. Gegeben: Windschiefe Geraden g, h im proj. abg. eukl. Raum: $g \cap h = \emptyset$

und Punkt $P \notin g \cup h$, d.h. $P \notin g$ und $P \notin h$. $\quad$ ($g \parallel h \Rightarrow \exists\, F = g \cap h$)

Zu zeigen: Es gibt genau eine Gerade k mit $P \in k$, $k \cap g \neq \emptyset$, $k \cap h \neq \emptyset$

Betrachte $\boxed{\gamma = Pg}$ (vgl. T9)



$\overset{T10}{\Rightarrow}$ $\boxed{h \cap \gamma = H}$ ist ein eind. Punkt

(Wäre $h \subset \gamma$, so gäbe es in γ einen Schnitt $g \cap h$ ↯ zur Voraus.)

$\overset{\text{in } \gamma}{\Rightarrow}$ $\boxed{PH \cap g = G}$ ist ein eind. Punkt

(Wäre $g = PH \Rightarrow P \in g$ ↯ zur Voraus)

$\Rightarrow k = PH$ enthält P und trifft g und h jeweils in einem Punkt

(Umgekehrt könnte man $\boxed{\eta = Ph} \Rightarrow g \cap \eta = G$ und $PG \cap h = H$ betrachten)

Wegen $k = PH \subset \boxed{\eta = Ph}$ gilt: $\boxed{k = Pg \cap Ph}$ ist eindeutig bestimmt

Die Aussage gilt auch im Fall, dass $h \parallel Pg = \gamma$ oder $g \parallel Ph = \eta$ liegt.