Geometrie LB   Hausaufgaben   Blatt 8

Notiztitel   24.11.2014

affine Koord   homogene Koord.

H18 a) $h:\ x\,y = \frac{1}{2}$ $\Leftarrow\left(x = \frac{x_1}{x_0},\ y = \frac{x_2}{x_0} \right)\Rightarrow$

bzw.

(Kegelschnittsgleichung in P^2) $= A$ mit $A^T = A$

b) Ferngerade $x_0 = 0 \cap h \Leftrightarrow$

$\Rightarrow$ $(x_0, x_1, x_2) \neq (0,0,0)$

bis auf $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Dies sind die Fernpunkte der x- bzw y-Achse der eukl. Ebene

c) Nach Vorlesung gilt im Fall $\det(A) \neq 0$ (hier $\det A = -1$) für die

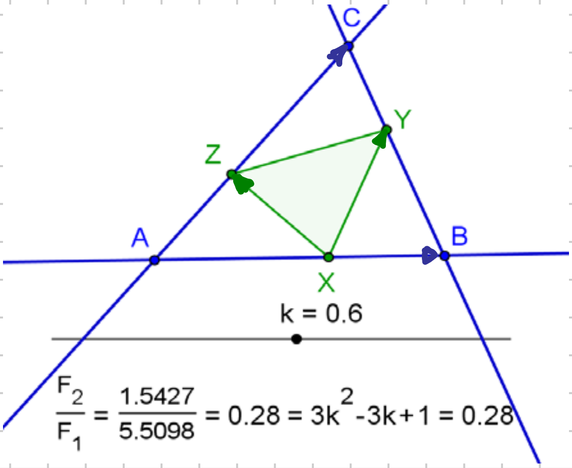
Tgte g_1 in $H_1(\vec{h_1})$: $\vec{h_1}^T A \vec{x} = 0 \Leftrightarrow$

Tgte g_2 in $H_2(\vec{h_2})$: $\vec{h_2}^T A \vec{x} = 0 \Leftrightarrow$

Übergang zu eukl. Koordinaten $x = \frac{x_1}{x_0}$ und $y = \frac{x_2}{x_0}$ (o.E. $x_0 = 1$)
liefert $g_1: y = 0$ (x-Achse) und $g_2: x = 0$ (y-Achse)

Bemerkung: Allgemein gilt: Die Asymptoten einer Hyperbel sind die Tangenten der Hyperbel in den Fernpunkten der Hyperbel. Dieser Satz lässt sich unter Nutzung homogener Koordinaten ganz ohne Grenzbetrachtungen begründen, bei denen Koordinaten gegen ∞ gehen.

H19.



Betrachtung im $\mathbb{R}^3$, um Flächeninhalte einfach zu erhalten

$F_1 = \frac{1}{2}|\vec{AB} \times \vec{AC}|$ (1)

$F_2 = \frac{1}{2}|\vec{XY} \times \vec{XZ}|$ (2)

$\vec{AX} = k \cdot \vec{AB} \Rightarrow X$ auf Gerade AB

analog Y auf BC, Z auf CA.

Zum Vergleich von F_1 und F_2 möglichst $\vec{XY}$ <u>und</u> $\vec{XZ}$ durch $\vec{AB}$ und $\vec{AC}$ ausdrücken.

$\vec{XY} =$

$\vec{XZ} =$

$\vec{XY} \times \vec{XZ} =$

$$F_2 = \frac{1}{2}|\vec{XY} \times \vec{XZ}| = |3k^2 - 3k + 1| \cdot \frac{1}{2} \cdot |\vec{AB} \times \vec{AC}| = |3k^2 - 3k + 1| \cdot F_1 \quad (4)$$

Wegen $3k^2 - 3k + 1 = 0 \Leftrightarrow k_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-12}}{6} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

ist $3k^2 - 3k + 1 > 0 \quad \forall k \in \mathbb{R}$. $\Rightarrow \underline{\frac{F_2}{F_1} = 3k^2 - 3k + 1}$

F_2/F_1 ist minimal für $k = \frac{1}{2}$ d.h. für das Seitenmittendreieck

H20. $U = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow U^T U = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} =$

$\Rightarrow$ <u>U ist Drehmatrix</u>

Drehachse $\vec{r}$: gesucht $\vec{x} \in \mathbb{R} \setminus \{\vec{0}\}$ mit $U\vec{x} = \vec{x}$

$$2x+2y+z=3x$$
$$\Leftrightarrow \quad x-2y+2z=3y \quad \Leftrightarrow$$
$$2x-y-2z=3z$$

$\Rightarrow \ \vec{r} = \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{11}}$ ist Richtung der Drehachse

U besitzt sicher einen EV zum EW $\lambda = 1$
$\Rightarrow$ (3) ist LK von (1) $\wedge$ (2)

Damit ist $\vec{r}$ normiert und durch die Wahl von $+\vec{r}$ orientiert

Drehwinkel δ?

1. Weg: Wähle $\vec{s} \perp \vec{r}$ z.B. $\vec{s} = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$ o.E. auf 1 normiert

$\Downarrow$

$$\Rightarrow \vec{s}\,' = U\vec{s} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}2&2&1\\1&-2&2\\2&-1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix}$$ $|\vec{s}\,'| = 1$

$$\cos\delta = \frac{\vec{s}\circ\vec{s}\,'}{|\vec{s}||\vec{s}\,'|} = \vec{s}^{\,T}\vec{s}\,' = \frac{1}{6}\cdot(0\ 1\ -1)\begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix} = \frac{-5}{6}$$ bis auf Orientierung

2. Weg: $$\cos\delta = \frac{\text{spur}\,U - 1}{2} = \frac{\frac{1}{3}(2-2-2)-1}{2} = \frac{-5}{6}$$

Vorzeichen von δ? $-\pi < \delta < \pi$

Ist $\{\vec{s}, \vec{s}\,', \vec{r}\}$ in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem $\Rightarrow \delta > 0$

$$\det(\vec{s}, \vec{s}\,', \vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{3\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{11}}\det\begin{pmatrix}0&1&3\\1&-4&1\\-1&1&1\end{pmatrix} =$$ Faktoren ausklammern!

$$= \frac{1}{6\sqrt{11}}\cdot(-1+3-12-1) = \frac{-11}{6\sqrt{11}} < 0 \Rightarrow \delta = -\underbrace{\arccos\left(-\tfrac{5}{6}\right)}_{\in[0,\pi]}$$

Ersetzt man $\vec{r}$ durch $-\vec{r}$, d.h. orientiert man die Drehachse um, so wird auch δ umorientiert, d.h. $\delta \to -\delta$