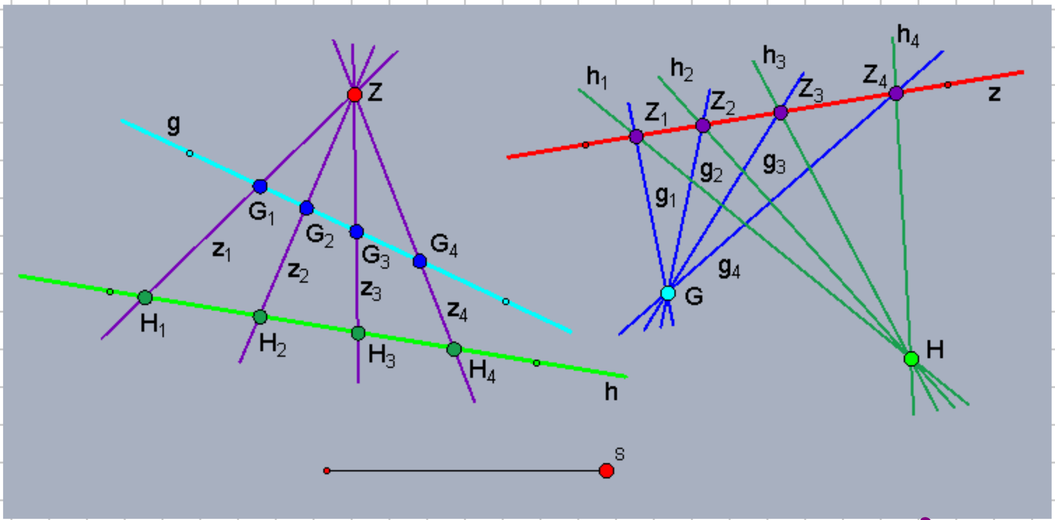
Geometrie LB Übungen Blatt 7

Notiztitel 16.11.2014

T 17.



Lindenthal-Figur

Punkt $G_i = g \wedge z_i$ Schnitt — dual zu — Gerade $g_i = G + Z_i$ Verbindung

Gerade $g \ni G_i$ $\longleftrightarrow$ Punkt $G \in g_i$

a) **Satz S**

Seien g, h zwei verschiedene Geraden und Z ein Punkt mit $Z \notin g \cup h$.
Seien weiter z_1, z_2, z_3, z_4 vier Geraden durch Z (paarweise verschieden), die g in den Punkten G_1, G_2, G_3, G_4 und h in den Punkten H_1, H_2, H_3, H_4 schneiden. Dann gilt:

$DV(G_1 G_2 G_3 G_4) = DV(H_1 H_2 H_3 H_4)$

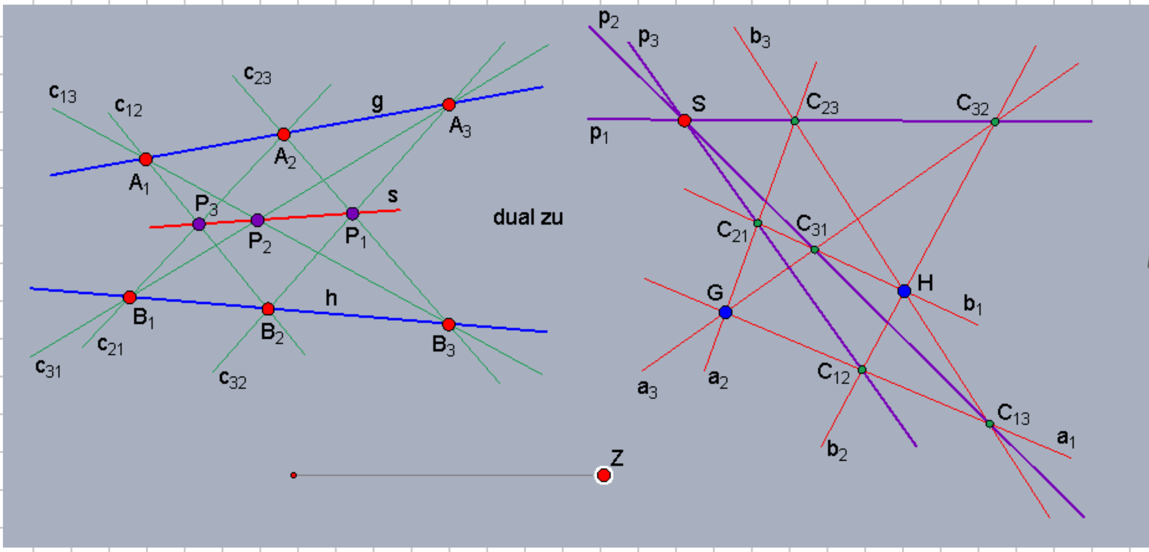
Satz S'

Seien G, H zwei verschiedene Punkte und z eine Gerade mit $G, H \notin z$.
Seien weiter Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 vier Punkte auf z (paarweise verschieden), deren Verbindungsgeraden mit G mit g_1, g_2, g_3, g_4 und mit H mit h_1, h_2, h_3, h_4 bezeichnet werden. Dann gilt:

$DV(g_1 g_2 g_3 g_4) = DV(h_1 h_2 h_3 h_4)$

b) Die Gültigkeit von Satz S' folgt aus der von Satz S, da die Aussage S' durch Dualisieren von Schnitt von Geraden oder Verbindung von Punkten erhalten wird.

T18.



Einander duale Figuren

Punkt A_i auf Gerade g $\quad\xleftrightarrow{\text{dual zu}}\quad$ Gerade a_i durch Punkt G

Verbind.gerade $c_{ij} = A_i + B_j$ $\quad\longleftrightarrow\quad$ Schnittpunkt $C_{ij} = a_i \cap b_j$

Axiom von Pappos	duale Aussage von Pappos
Gegeben seien zwei Geraden g und h sowie je 3 Punkte A_i auf g, B_i auf h $(i=1,2,3)$. Dann gilt: Die Schnittpunkte P_k $(1 \le k \le 3)$ der Verbindungsgeraden $c_{ij} = A_i + B_j$ und $c_{ji} = A_j + B_i$ $(1 \le i,j \le 3,\ i \ne j \ne k \ne i)$ liegen kollinear (auf einer Geraden s)	Gegeben seien zwei Punkte G und H sowie je 3 Geraden a_i durch G, b_i durch H. Dann gilt: Die Verbindungsgeraden p_k $(1 \le k \le 3)$ der Schnittpunkte $C_{ij} = a_i \cap b_j$ und $C_{ji} = a_j \cap b_i$ $(1 \le i,j \le 3,\ i \ne j \ne k \ne i)$ sind kopunktal (schneiden einander in einem Punkt S)

Bemerkung: Die beiden Figuren haben gleich viele Punkte wie Geraden (9 Punkte | 9 Geraden) und sehen letztlich „gleich" aus. Die Aussagen sind aber unterschiedlich.

Realisierung: Vertausche in Geradengl. u: $\vec{u}^T \vec{x} = 0$ die Rolle der homogenen Punkt- bzw Geradenkoord. $\Rightarrow$ $\underset{\text{Punkt}}{X(\vec{x})} \in \underset{\text{Gerade}}{u(\vec{u})} \xleftrightarrow{\text{dual}} \underset{\text{Punkt}}{U(\vec{u})} \in \underset{\text{Gerade}}{x(\vec{x})}$

Schnittpkt $X(\vec{x}) = \underbrace{u(\vec{u}) \cap v(\vec{v})}_{\text{der Geraden}} \Leftrightarrow \begin{matrix} \vec{u}^T\vec{x} = 0 \\ \vec{v}^T\vec{x} = 0 \end{matrix} \xleftrightarrow{\text{dual}}$ Verb.gerade $x(\vec{x}) = \underbrace{U(\vec{u})\,V(\vec{v})}_{\text{der Punkte}}$

Analog im P^3: Pkt $\leftrightarrow$ Ebene, Schnittgerade $u \cap v$ $\leftrightarrow$ Verb.gerade UV

T19 a) Gerade g: $y = mx + b \xleftrightarrow[y = \frac{x_2}{x_0}]{x = \frac{x_1}{x_0}} g: \frac{x_2}{x_0} = m\frac{x_1}{x_0} + b \iff b x_0 + m x_1 - x_2 = 0$

in affinen Koord. in homogenen Koord. $\vec{u}^T \vec{x} = 0$

Eine Projektivität (bijektive geradentreue Abb. $P^n \to P^n$) ist gegeben durch $\vec{y} = \mathcal{U}\vec{x}$ mit $(n+1)\times(n+1)$-Matrix $\mathcal{U}$ und $\det \mathcal{U} \neq 0$

Die wie folgt gewählte Abbildung:

$$(*) \quad \begin{aligned} y_0 &= b x_0 + m x_1 - x_2 \\ y_1 &= x_0 \\ y_2 &= x_1 \end{aligned} \iff \vec{y} = \underbrace{\begin{pmatrix} b & m & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{= \mathcal{U} \text{ mit } \det \mathcal{U} = -1 \neq 0 \text{ ist eine Projektivität}} \vec{x}$$

bildet g auf die Ferngerade $y_0 = 0$ ab, da für $X(\vec{x}) \in g \Rightarrow b x_0 + m x_1 - x_2 = 0$

b) Kreis k: $x^2 + y^2 = 1 \xleftrightarrow[y = \frac{x_2}{x_0}]{x = \frac{x_1}{x_0}} k: \left(\frac{x_1}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_0}\right)^2 = 1 \iff x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = 0$

in affinen Koord.

$$\iff \vec{x}^T \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{=: A \text{ mit } A^T = A} \vec{x} = 0 \iff \vec{x}^T A \vec{x} = 0$$

in homogenen Koord.

Bild k' bei Projektivität $\vec{y} = \mathcal{U}\vec{x} \iff \vec{x} = \mathcal{U}^{-1}\vec{y}$ erhält man durch Einsetzen als

$$0 = \vec{x}^T A \vec{x} = (\mathcal{U}^{-1}\vec{y})^T A (\mathcal{U}^{-1}\vec{y}) = \vec{y}^T \underbrace{\mathcal{U}^{-1T} A\, \mathcal{U}^{-1}}_{=: B} \vec{y} = \vec{y}^T B \vec{y}$$

$=: B$ mit $B^T = \mathcal{U}^{-1T} \underbrace{A^T}_{=A} \underbrace{(\mathcal{U}^{-1T})^T}_{= \mathcal{U}^{-1}} = B$

Kegelschnitt $\vec{y}^T B \vec{y} = 0$.

Berechnung von $\mathcal{U}^{-1}$ aus $(*)$:

$$\begin{aligned} x_0 &= y_1 \\ x_1 &= y_2 \\ x_2 &= -y_0 + b x_0 + m x_1 \\ &= -y_0 + b y_1 + m y_2 \end{aligned} \Rightarrow \vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & b & m \end{pmatrix}}_{= \mathcal{U}^{-1}} \vec{y}$$

$\mathcal{U}^{-1}$ hier schneller bestimmt als mit Schema $(\mathcal{U} \mid E)$!

$$\Rightarrow B = \mathcal{U}^{-1T} A\, \mathcal{U}^{-1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -b \\ 0 & -1 & -m \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & b & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & b & m \\ b & 1-b^2 & -mb \\ m & -mb & -(1+m^2) \end{pmatrix}$$

$$\underline{m=0}: \quad = \begin{pmatrix} -1 & b & 0 \\ b & 1-b^2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow k': \vec{y}^T \begin{pmatrix} -1 & b & 0 \\ b & 1-b^2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \vec{y} = -y_0^2 + 2b y_0 y_1 + (1-b^2) y_1^2 - y_2^2 = 0 \quad \Big| : y_0^2$$

in homogenen Koord.

$$\Leftrightarrow 1 = (1-b^2)\left(\frac{y_1}{y_0}\right)^2 + 2b\left(\frac{y_1}{y_0}\right) - \left(\frac{y_2}{y_0}\right)^2 \quad \overset{x'=\frac{y_1}{y_0}}{\underset{y'=\frac{y_2}{y_0}}{\longleftrightarrow}} \quad (1-b^2)x'^2 + 2bx' - y'^2 = 1$$

in affinen Koord.

① Für $b=0$ ergibt sich: k': $x'^2 - y'^2 = 1$ Hyperbel mit Asymptoten $y' = \pm x'$, d.h. zwei Fernpunkten $(0, 1, \pm 1)$.

Beachte: $g \cap k$ sind zwei Pkte mit den homogenen Koord.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \mathcal{U}\begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$$ Richtungen der Asymptoten

② Für $b=1$ ergibt sich: k': $2x' - y'^2 = 1 \Leftrightarrow x' = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}y'^2$

Parabel nach rechts geöffnet mit x'-Achse als Achse mit Fernpunkt $(0, 1, 0)$.

Richtung der Achse

Beachte: $g \cap k$ ist ein Punkt $$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to \mathcal{U}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

③ Für $b=2$ ergibt sich: k': $-3x'^2 + 4x' - y'^2 = 1$

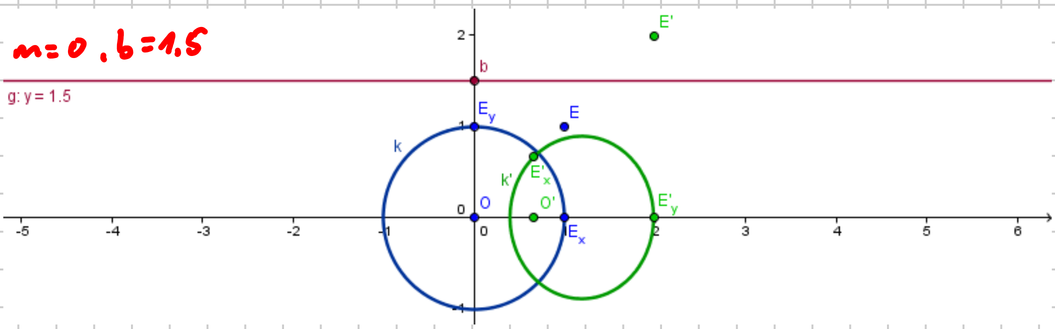
$\Leftrightarrow 3\left(x'^2 - \frac{4}{3}x'\right) + y'^2 = -1$ | erg. $\frac{4}{3}$ $\Leftrightarrow 3\left(x' - \frac{2}{3}\right)^2 + y'^2 = \frac{1}{3}$

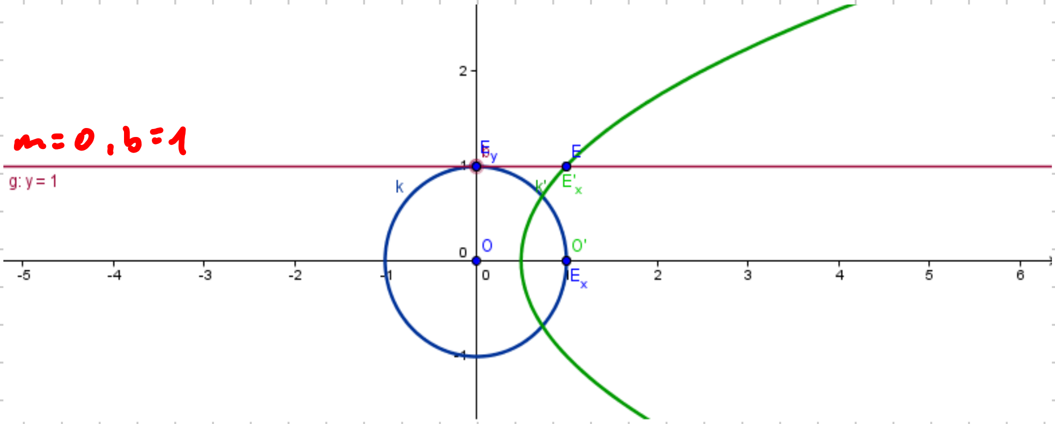
Ellipse um Mittelpunkt $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ (ist nicht Bild von $(0,0)$!)

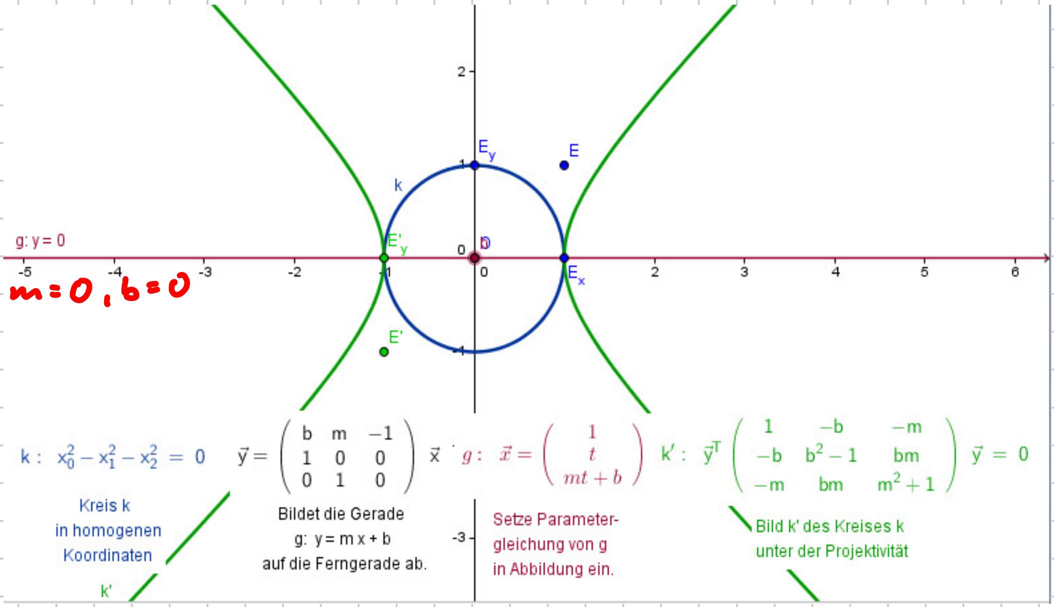
Beachte: $g \cap k = \emptyset$, d.h. k' besitzt keine Fernpkte

Allgemein gilt:

- Trifft g den Kreis k in 2 Punkten, so ist k' eine Hyperbel mit 2 Fernpunkten = Bild der Schnittpunkte $g \cap k$
- Trifft g den Kreis k in genau 1 Punkt, so ist k' eine Parabel mit Achse in Richtung des Fernpunktes = Bild Berührpkt $g \cap k$
- Trifft g den Kreis k nicht, so ist k' eine Ellipse.




m=0, b=1
g: y = 1
k
E
E_y
E'_x
k'
O
O'
E_x


g: y = 0
m=0, b=0
k
E_y
E
E'_y
O
E_x
E'
$k: \; x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = 0$
Kreis k
in homogenen
Koordinaten
$\vec{y} = \begin{pmatrix} b & m & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}$
Bildet die Gerade
g: y = m x + b
auf die Ferngerade ab.
$g: \; \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ mt+b \end{pmatrix}$
Setze Parameter-
gleichung von g
in Abbildung ein.
$k': \; \vec{y}^T \begin{pmatrix} 1 & -b & -m \\ -b & b^2-1 & bm \\ -m & bm & m^2+1 \end{pmatrix} \vec{y} = 0$
Bild k' des Kreises k
unter der Projektivität
k'