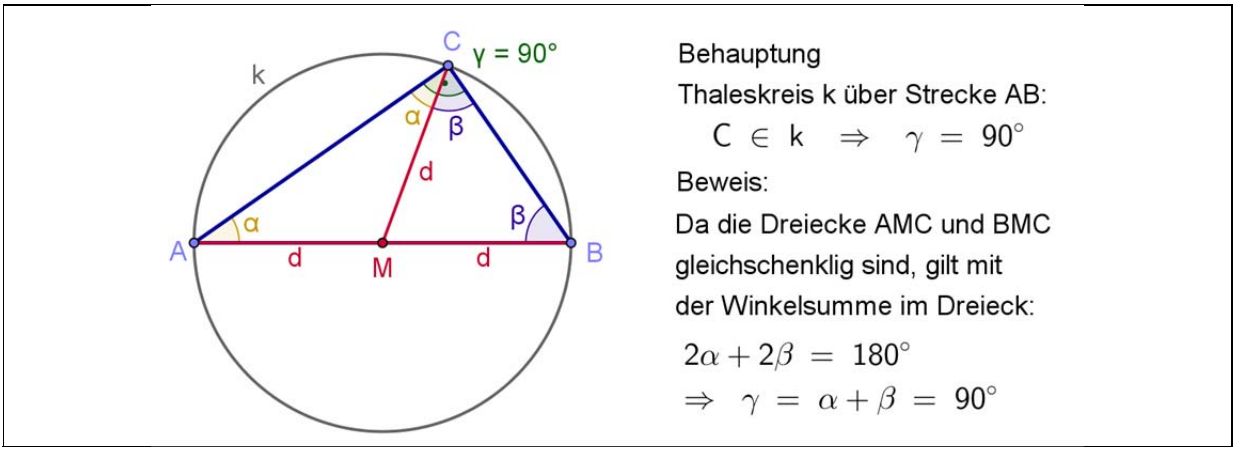
# 4 Figuren zum Satz von Thales

Betrachtet man ein Dreieck ABC mit C auf dem Kreis über der Strecke AB (um den Mittelpunkt M von AB), so vermutet man, dass $\gamma$ = <)ACB = 90° ist. Zum Beweis betrachtet man, „was noch konstant“ ist. Trägt man die konstante Strecke d=MC ein, so ergeben sich zwei gleichschenklige Dreiecke AMC und BMC mit den Basiswinkeln $\alpha$ bzw. $\beta$ und mit der Winkelsumme im Dreieck die Vermutung $\Rightarrow$ **Erster Teil des Satzes von Thales**:

**Liegt C auf dem Thaleskreis über der Strecke AB, so ist der Winkel $\gamma$ = 90° .**



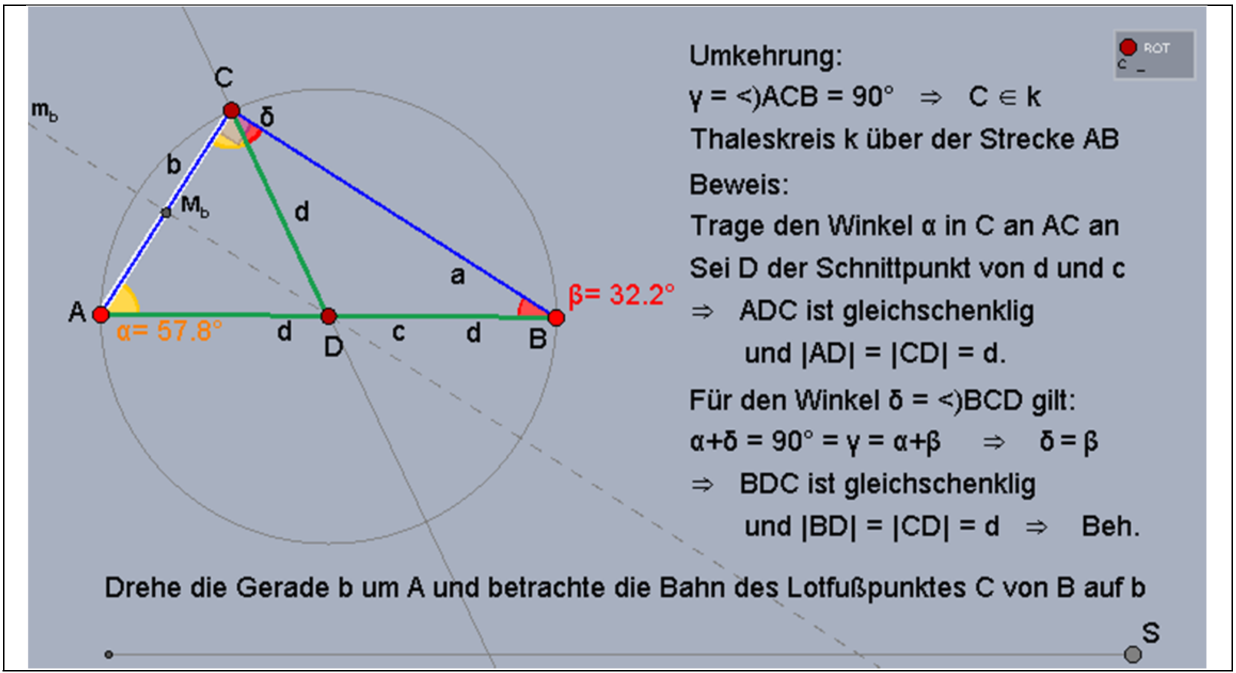

Es gilt aber auch die **Umkehrung dieser Aussage**:

**Gilt im Dreieck ABC: $\gamma$ = 90°, so liegt C auf dem Thaleskreis über der Strecke AB.**

Diese Aussage kann man wie folgt begründen und **direkt beweisen**, vgl. Thales2.cdy:

Wähle zur Strecke c = AB eine Gerade b durch A und den Punkt C als Lotfußpunkt von B auf b. Dreht man die Gerade b um A, so durchläuft C einen Kreis (den Thaleskreis).

Zum Beweis trage den Winkel $\alpha$ in C an AC nach innen an. Die erhaltene Gerade schneidet AB im Punkt D. Wegen $\alpha$ = <)DAC = <)ACD ist das Dreieck ADC gleichschenklig mit |AD| = |CD|. Für den Winkel $\delta$ = <)DCB gilt: $\alpha+\delta = 90° = \gamma = \alpha+\beta$ $\Rightarrow$ $\delta = \beta$ $\Rightarrow$
Das Dreieck BDC ist gleichschenklig mit |BD| = |CD| $\Rightarrow$ Behauptung, vgl. Thales3.cdy.



Zum Abtragen des (variablen) Winkels $\alpha$ kann man bei Cinderella nach Messen von $\alpha$ mittels „Modi/Transformation/Drehung Punkt|Winkel“ eine Drehung um C mit Winkel $\alpha$ definieren und damit A um C drehen, d.h. „abbilden“. Bei GeoGebra kann man mit dem Werkzeug **Drehe Punkt** den Punkt A um C durch den Winkel $\alpha$ drehen.

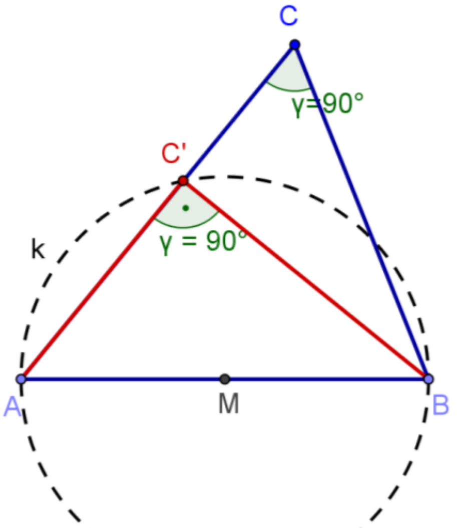
Man erhält die Ecke D des gleichschenkligen Dreiecks ADC aber auch als Schnitt von c mit dem Mittellots $m_b$ von A und C. Umgehung von Problemen durch alternative Konstruktionen.

Ein kleines Problem stellt bei Cinderella die Bezeichnung von Winkeln dar, da man Winkelmarkierungen nicht bezeichnen kann und die Bezeichnung gemessener Winkel zwar ändern kann, diese aber nicht immer im Winkelfeld bleiben. Daher wurde im File Thales3.cdy für den Winkel $\delta$ ein Punkt Delta.xy=C-(C-D)/|C-D|*0.8; mit der Bezeichnung $\delta$ eingeführt.

Gib im Konstruktionsprotokoll von Thales3.ggb Haltepunkte ein, so dass die Navigation die wesentlichen Schritt des Beweises liefert.

Betrachte beim File Thales1.cdy die Navigation durch die Konstruktion mit Hilfe des Schiebereglers S, siehe dazu unter **Scripting/Scripte erstellen/Zeichnen/Script**.

Die Umkehrung des Satzes von Thales kann man aber auch **indirekt durch Widerspruch beweisen**:




Annahme:
Es gibt ein rechtwinkliges Dreieck ABC, dessen Ecke C nicht auf dem Thaleskreis k über der Strecke AB liegt.

Dann schneidet AC (oder BC) den Thaleskreis k in einem Punkt C', sodass das Dreieck ABC' rechtwinklig ist.
Damit hat das Dreieck BCC' aber zwei rechte Winkel im Widerspruch zur Winkelsumme im Dreieck.

Die Visualisierung eines Widerspruchsbeweises hat das Problem, dass die Annahme - hier $\gamma = 90°$ - augenscheinlich nicht stimmt. Davon abgesehen muss für alle Lagen von C ein Widerspruch hergeleitet werden. Für C links von A scheidet der Strahl AC den Kreis k nur im Punkt A, für C rechts von B schneidet der Strahl BC den Kreis k nur im Punkt B. Um die Figur symmetrisch zu gestalten, kann man C' für C rechts von M als zweiten Schnittpunkt D von AC mit k und für C links von M als zweiten Schnittpunkt E von BC mit k definiert.

Das geht bei

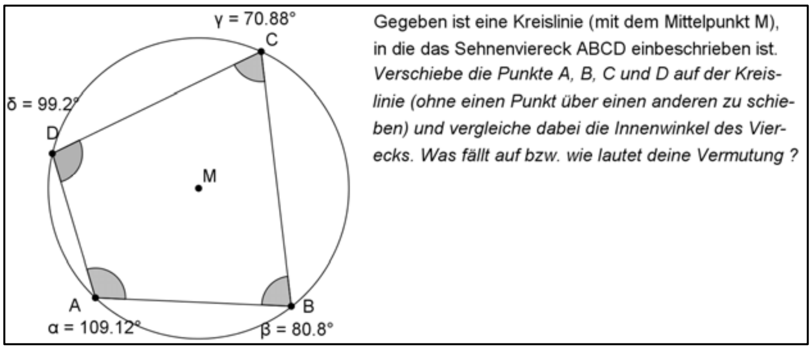
1. GeoGebra mit C’ = Wenn[x(C) > x(M), D, E]
2. Cinderella über CindyScript mit C'.xy=if( C.x > M.x , D.xy , E.xy);

Entsprechend muss in der Begründung das Dreieck BCC’ oder das Dreieck ACC’ stehen. Das geht bei

1. GeoGebra mit " Text " + (Wenn[x(C) > x(M), "BCC'", "ACC'"]) + " Text "
2. Cinderella über CindyScript mit
   Drawtext( T," Text "+ if( C.x> M.x , " BCC' " , " ACC' ") +" Text “ , size->18);

# Winkel im Sehnenviereck

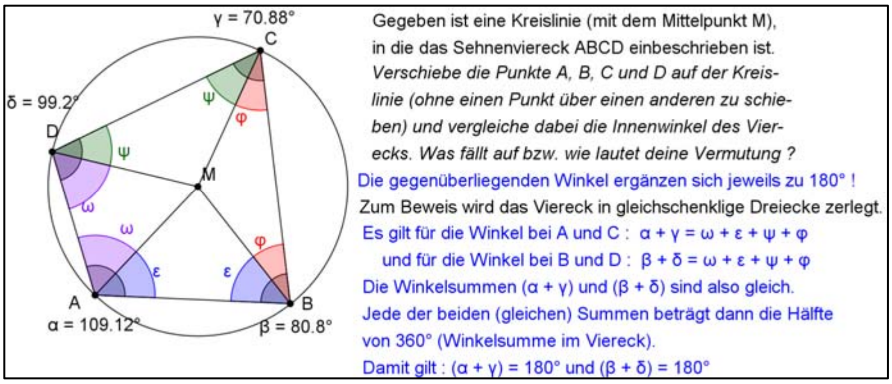
Führe die Textanweisung (Verschiebe ...) aus und schreibe mithilfe des Textwerkzeugs unter den gegebenen Text die Vermutung. **„Die gegenüberliegenden Winkel ergänzen sich jeweils zu 180°“**




Zeichne nun weitere hilfreiche Objekte (z.B. die Verbindungsstrecken von M zu den Punkten A, B, C und D) und die Teilwinkel ein und formuliere damit einen Beweis für die Vermutung.

Weshalb deckt der Beweis (wie im Kasten ausgeführt) noch nicht alle möglichen Fälle ab ?

Welche Fallunterscheidung wäre erforderlich, um den Beweis vollständig zu führen ?




Schiebt man eine Ecke (z.B. Ecke C) über eine benachbarte Ecke (z.B. Ecke D), so entsteht ein sog. überschlagenes Viereck, in dem sich zwei Seiten (im Bsp. b und d) schneiden. Beispielsweise wäre dann der Winkel ADC (δ) größer als 180° (gleiche Orientierung: **gegen** den Uhrzeiger). Formuliere eine Winkelbeziehung für ein überschlagenes Sehnenviereck!

Wie man die Textanweisungen und Überlegungen noch stärker gliedern und in einzelne Schritte zerlegen kann, bei denen neue Texte und Grafikelemente erscheinen und andere wieder verschwinden, zeigen die Dateien *Sehnenviereck aufwendige Lösung.ggb*. und *Sehnenviereck aufwendige Lösung.cdy*. Dabei hilft eine Variable, die z.B. Zähler heißen kann. Bei Geogebra wird sie in der Eingabezeile definiert und z.B. zunächst mit dem Wert 0 initialisiert: *Zähler=0*. Mit zwei Schaltern (Schaltflächen) *Weiter* und *Zurück* wird der Wert des *Zählers* mit einer Skript-Anweisung (Eigenschaften -> Skripting) um 1 vergrößert (*Zähler=Zähler+1*) bzw. verkleinert (*Zähler=Zähler-1*). Soll ein Text z.B. nur erscheinen, wenn der Zähler den Wert 3 hat, so muss dort stehen (unter Eigenschaften -> Erweitert -> Bedingung, um Objekt anzuzeigen) *Zähler==3*. Bei Cinderella lässt sich ein "Schieberegler" generieren. Die Variable Zähler wird dabei unter "Scripting" mit der Skriptsprache "Cindyscript" z.B. als Differenz der x-Koordinaten eines auf einer festen Strecke beweglichen Punktes S zum linken Endpunkt der Strecke definiert. Durch Verschieben von S auf der Strecke lässt sich somit der Zähler verändern. Alle weiteren Anweisungen zum Erscheinen und Verschwinden von Texten und Grafiken werden in den Skripteditor (unter "Scripting") geschrieben.