Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Dr. H. Vogel

WS 2021/22
Blatt 10

Geometrie für das Lehramt an beruflichen Schulen

Tutoraufgaben:

T24. Gegeben sei im $\mathbb{R}^3$ eine $C^\infty-$Kurve c durch die Parameterdarstellung:

$$\vec{x}(t) := \begin{pmatrix} 3\cos t \\ 3\sin t \\ t^2 \end{pmatrix}, \quad t \in [-\pi, \pi].$$

a) Zeigen Sie, dass $\vec{x}(t)$ auf $(-\pi, \pi)$ regulär und einfach ist.

b) Bestimmen Sie die Tangenten von c im Anfangs- und Endpunkt A, E von c.

c) Berechnen Sie die Länge s des Kurvenbogens von c (Schleife AE).

d) Bestimmen Sie eine Gleichung der Schmiegebene σ von c im Punkt $\vec{x}(t)$ in Abhängigkeit von t. In welchen Punkten von c enthält die Schmiegebene den Punkt $R(0,0,6)$?

e) Berechnen Sie die Krümmung $\kappa(t)$ und die Torsion $\tau(t)$ von c in Abhängigkeit des Parameters t. In welchen Punkten von c ist die Krümmung $\kappa(t)$ extremal ?

f) Skizzieren Sie die Normalprojektion c^* von c in die $yz-$Ebene in einem $yz-$ Koordinatensystem mit der Längeneinheit 1cm.

T25. Gegeben ist die (nichtebene) "kubische Parabel"

$$c \subset \mathbb{R}^3 : \ \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 4-3t^2 \\ 6t^3 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

a) Zeigen Sie, dass c eine reguläre, doppelpunkt- und W-punktfreie Kurve ist.

b) Berechnen Sie die Bogenlänge $s(t)$, die Krümmung $\kappa(t)$ und die Torsion $\tau(t)$ von c.

c) Bestimmen Sie das Frenet-Dreibein $\{\vec{t}(t), \vec{n}(t), \vec{b}(t)\}$ der Kurve c.

d) Zeigen Sie, dass alle Kurventangenten von c zur Richtung $\vec{a} = (1,0,1)^T$ den selben Winkel α einschließen. Bestimmen Sie α.

Anmerkung: c nennt man eine **Böschungslinie**, da sie in jedem Punkt die selbe Steigung gegenüber einer Ebene senkrecht zur Richtung $\vec{a}$ hat. $\vec{a}$ nennt man die **Böschungsrichtung** und den festen Winkel α der Kurventangenten zur Richtung $\vec{a}$ den **Böschungswinkel**. Es gilt:

$$\frac{\dot{\vec{x}}(t) \cdot \vec{a}}{|\dot{\vec{x}}(t)| \cdot |\vec{a}|} = \cos(\alpha) = const. \quad \text{für alle} \quad t \in I \subset \mathbb{R}.$$

Hausaufgaben:

H23. Gegeben sei im $\mathbb{R}^3$ eine $C^\infty-$Kurve c durch die Parameterdarstellung:

$$\vec{x}(s) := \begin{pmatrix} \sin s \\ \frac{1}{2}\sin^2 s \\ \frac{1}{2}(s - \sin s \cos s) \end{pmatrix}, \quad s \in [-\pi, \pi].$$

a) Zeigen Sie, dass der Kurvenparameter s die Bogenlänge von c und c regulär ist. **Beachte:** Die 3.Komponente von $\dot{\vec{x}}$ ist $\sin^2 s$.

b) Geben Sie die Krümmung $\kappa(s)$ von c in Abhängigkeit der Bogenlänge s an. Ist die Kurve $W-$punktfrei ?

c) Bestimmen Sie an der Stelle $s_0 = \frac{\pi}{2}$ das Frenet-Dreibein $\vec{t}(s_0)$, $\vec{n}(s_0)$, $\vec{b}(s_0)$, eine Gleichung für die Schmiegebene $\sigma(s_0)$ von c sowie die Torsion $\tau(s_0)$.

d) Zeigen Sie, dass die Normalprojektion c^* von c in die $xy-$Ebene in einer Parabel liegt und geben Sie diese in expliziter Darstellung an.

H24. Durch die Parameterdarstellung

$$c \subset \mathbb{R}^3: \ \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t\cos t - \sin t \\ t\sin t + \cos t \\ t^2 + 1 \end{pmatrix}, \quad t > 0$$

ist eine Raumkurve c gegeben.

a) Zeigen Sie, dass c eine reguläre, doppel- und W-punktfreie Kurve ist.

b) Geben Sie eine Parameterdarstellung von c nach ihrer Bogenlänge s an.

c) Berechnen Sie die Krümmung $\kappa(t)$ und die Torsion $\tau(t)$ von c.

d) Zeigen Sie, dass c eine Böschungslinie zur Richtung $\vec{a} = (0, 0, 1)^T$ ist, vgl. **T 25**.

e) Zeigen Sie, dass die Kurve c auf dem Drehparaboloid $\Phi: \ x^2 + y^2 - z = 0$ liegt.