4 Ein wenig analytische Geometrie

4.1 Dualitätsprinzip im $P^n, n = 2, 3$

4.1.1 Dualität Punkt/Gerade im P^2

Betrachte die Geradengleichung einer Geraden $g \subset P^2$ in homogenen Koordinaten:

$g : \vec{a}^T\vec{x} = a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0 \qquad$ **(*)**

(*) ist offenbar symmetrisch in $\vec{a}$ und $\vec{x}$.

Für festes $\left\{ \begin{matrix} \vec{a} \\ \vec{x} \end{matrix} \right\}$ ist **(*)** die Gleichung für die Menge der $\left\{ \begin{matrix} \text{Punkte auf einer Geraden} \\ \text{Geraden durch einen Punkt} \end{matrix} \right\}$.

$\left\{ \begin{matrix} \vec{a} \\ \vec{x} \end{matrix} \right\}$ $\begin{matrix} \text{ist homogener} \\ \text{Koordinatenvektor} \end{matrix}$ $\left\{ \begin{matrix} \text{einer Geraden} \\ \text{eines Punktes} \end{matrix} \right\}$.

Das liefert zwei bijektive Abbildungen:

Punkte eines P^2
$\leftrightarrow$ homogene Koordinatenvektoren im $\mathbb{R}^3$
$\leftrightarrow$ Geraden eines P^2

Die Menge der Geraden einer projektiv abgeschlossenen euklidischen Ebene P^2 bildet selbst eine projektiv abgeschlossene euklidische Ebene, die zu P^2 **duale Ebene** $\widehat{P}^2$.

(Der Ferngeraden $1 \cdot x_0 + 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 0$ entspricht dabei der Koordinatenursprung $(1, 0, 0)$ eines kartesischen KS.)

Figur-4-1-1-a-DualitaetsprinzipEbene

Sind $\vec{a}$, $\vec{b}$ homogene Koordinatenvektoren zweier Geraden. Dann ist
$$\begin{array}{l} g_a: \ \vec{a}^T\vec{x} = 0 \\ g_b: \ \vec{b}^T\vec{x} = 0 \end{array}$$
ein lineares Gleichungssystem (**LGS**) für deren Schnittpunkt $X(\vec{x})$ mit $\vec{x} = \vec{a} \times \vec{b}$.

Sind $\vec{x}$, $\vec{y}$ homogene Koordinatenvektoren zweier Punkte. Dann ist
$$\begin{array}{l} g_a: \ \vec{a}^T\vec{x} = 0 \\ g_a: \ \vec{a}^T\vec{y} = 0 \end{array}$$
ein LGS für deren Vebindungsgerade $g(\vec{a})$ mit $\vec{a} = \vec{x} \times \vec{y}$.

Dualitätsprinzip der ebenen projektiven Geometrie:

Ist A eine allgemeingültige Aussage in P^2, in der Punkte, Geraden, Verbinden von Punkten, Schneiden von Geraden und keine weiteren Operationen vorkommen, so erhält man aus A eine dazu duale Aussage $\hat{A}$, inden man ersetzt:

A	$\hat{A}$
Punkt P	Gerade p
Gerade q	Punkt Q
verbinden	schneiden
$g = PQ$	$G = p \cap q$
schneiden	verbinden

Beachte dabei die Inzidenzen:
Punkt $P(\vec{p}) \in$ Gerade $g: \ \vec{g}^T\vec{x} = 0$ in P^2
$(\Leftrightarrow \vec{g}^T\vec{p} = \vec{p}^T\vec{g} = 0 \Leftrightarrow)$ bzw. dual zu
Punkt $G(\vec{g}) \in$ Gerade $p: \ \vec{p}^T\vec{x} = 0$ in $\hat{P}^2$

D.h.: Kollineare Punkte auf einer Geraden g sind dual zu kopunktalen Geraden durch einen Punkt G.

$\hat{A}$ gilt genau dann, wenn A gilt, muss also nicht eigens bewiesen zu werden.

Beispiel: Definition der harmonischen Lage von vier Geraden durch einen Punkt:

Erinnerung:
Geg.: ebenes Vierseit $PQRS$ mit den Seiten $p := PQ$, $q := QR$, $r := RS$, $s := SP$
Schnittpunkte der Gegenseiten
$p \cap r =: A$, $q \cap s =: B$
Schnittpunkte C, D von $g := AB$ mit den Diagonalen $e := PR$ und $f := QS$; also
$C := AB \cap PR$, $D := AB \cap QS$
Dann heißen die vier Punkte A, B, C, D auf g (in dieser Reihenfolge) **in harmonischer Lage**.

Figur-4-1-1-b-dualeHarmonischeLage

Dual dazu:

Geg.: ebenes Viereck $pqrs$ mit den Ecken $P := p \cap q$, $Q := q \cap r$, $R := r \cap s$, $S := s \cap p$

Verbindungsgeraden der Gegenecken

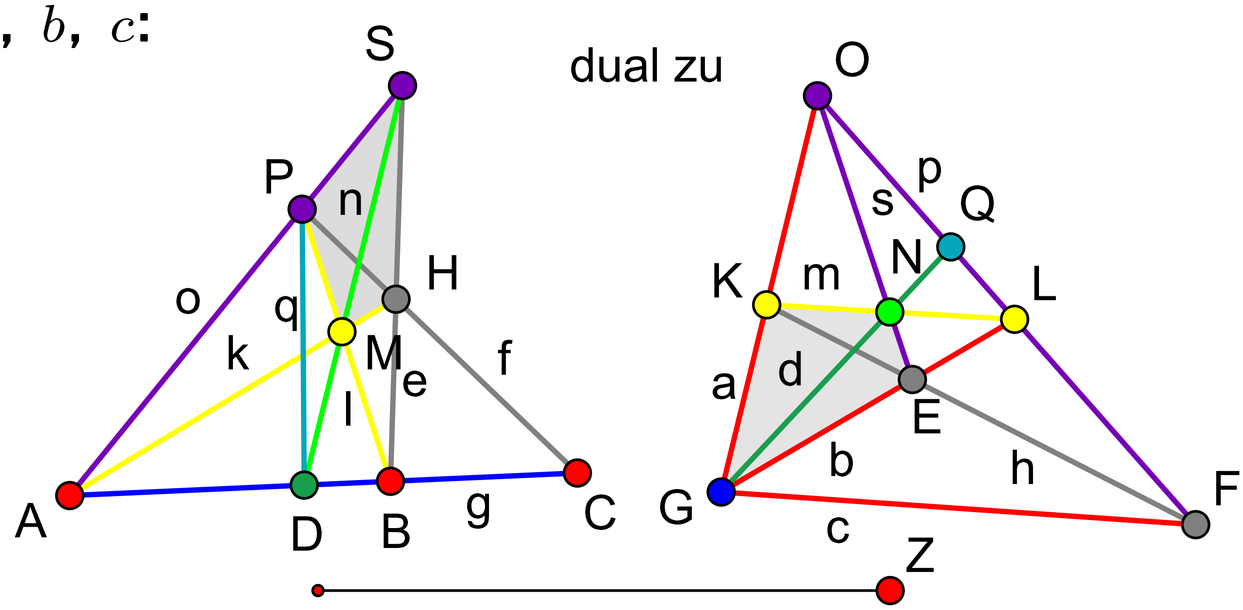
$PR =: a$, $QS =: b$

Verbindungsgeraden c, d von $G := a \cap b$ mit den Schnittpunkten der Gegenseiten $E := p \cap r$ bzw. $F := q \cap s$; also

$c := (a \cap b)(p \cap r), d := (a \cap b)(q \cap s)$

Dann heißen die vier Geraden a, b, c, d durch G (in dieser Reihenfolge) **in harmonischer Lage**.

Konstruktion der vierten harmonischen Geraden d zu drei gegebenen Geraden a, b, c:



Diese (alte) Figur wurde mit Cinderella erstellt.

Figur-4-1-1-c-duale Konstruktion Harmonische Lage

4.1.2 Dualität im projektiven Raum P^3

(a) Parameterform von Geraden und Ebenen in homogenen Koordinaten:

Eine Gerade $g \subset P^3$ ist festgelegt durch zwei Punkte $P(\vec{p}) \neq Q(\vec{q})$

homog. Koord. $\vec{p}, \vec{q} \in \mathbb{R}^4$ bis auf einen Faktor $\neq 0$ bestimmt.

$P = Q \Leftrightarrow \vec{p}, \vec{q}$ linear abhängig (**l.a.**)

Sind $\vec{p}, \vec{q}$ linear unabhängig, dann ist die **Parameterdarstellung von** $g = PQ$
$g : \vec{x} = u \cdot \vec{p} + v \cdot \vec{q}$ mit $u, v \in \mathbb{R}, (u, v) \neq (0, 0)$

homog. Koord. von $X(\vec{x}) \in g$ mit $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$ bis auf einen Faktor $\neq 0$ bestimmt. Warum $(u, v) \neq (0, 0)$? (vgl. PD: $g \subset P^2$)

Parameter $u = 0$ liefert Q. Parameter $v = 0$ liefert P.

Division durch u und $\frac{v}{u} =: v'$ liefert $g \setminus \{Q\}$:

$$\vec{x} = \vec{p} + v' \cdot \vec{q} \quad \text{mit } v' \in \mathbb{R}$$

Ist P ein eigentlicher Punkt und Q ein Fernpunkt, so sind $q_0 = 0$ und o.E. $p_0 = 1$ und die Division durch u liefert die bekannte Parameterdarstellung in affinen Koordinaten:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} + v' \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}, \ v' \in \mathbb{R}$$

mit Aufpunkt und Vielfachem eines Richtungsvektors $\vec{q}$ FP.

Sind P und Q eigentliche Punkte, so kann man o.E. $q_0 = p_0 = 1$ wählen und es gilt: $R(\vec{r})$ mit $\vec{r} = \vec{q} - \vec{p}$ ist Fernpunkt der Geraden $g = PQ = PR$.

Sind P und Q Fernpunkte, so ist $g = PQ$ eine (im P^2 **die**) Ferngerade.

Eine Ebene ε wird aufgespannt durch drei **nicht kollineare** Punkte $P(\vec{p})$, $Q(\vec{q})$, $R(\vec{r})$.

homog. Koord. $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r} \in \mathbb{R}^4$ bis auf einen Faktor $\neq 0$ bestimmt.

Die Punkte P, Q, R sind **kollinear**, wenn sie auf einer gemeinsamen Geraden liegen $\Leftrightarrow \vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ sind linear abhängig (**l.a.**).

Sind $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ linear unabhängig, dann ist eine **Parameterdarstellung von** $\varepsilon = PQR$

$$\varepsilon : \vec{x} = u\vec{p} + v\vec{q} + w\vec{r}, \quad u, v, w \in \mathbb{R},$$
$$\text{Parameter } (u, v, w) \neq (0, 0, 0).$$

homog. Koord. von $X(\vec{x}) \in \varepsilon$ mit $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$ bis auf einen Faktor $\neq 0$ bestimmt. Warum $(u, v, w) \neq (0, 0, 0)$? (vgl. PD: $g \subset P^2$)

Parameter $u = 0$ liefert die Gerade $QR \subset \varepsilon$.

Division durch u und $\frac{v}{u} =: v'$, $\frac{w}{u} =: w'$:

$$\vec{x} = \vec{p} + v'\vec{q} + w'\vec{r}, \quad v', w' \in \mathbb{R}$$

liefert $\varepsilon \setminus QR$.

Ist P ein eigentlicher Punkt, und sind Q, R Fernpunkte, so sind $q_0 = r_0 = 0$ und o.E. $p_0 = 1$ und die Division durch u liefert:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} + v' \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ q_x \\ q_y \\ q_z \end{pmatrix} + w' \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix},$$

also (bis auf die erste Zeile) die bekannte Parameterdarstellung einer Ebene im $\mathbb{R}^3$ ohne die Ferngerade QR von ε.

(b) Koordinatengleichung einer Ebene im P^3 in homogenen Koordinaten

Im P^3 erhält man wie folgt eine **Koordinatengleichung der Ebene** $\varepsilon = PQR$:

$X(\vec{x}) \in \varepsilon \Leftrightarrow \vec{x} = u\vec{p} + v\vec{q} + w\vec{r}$ (hom. Ko. von X)

$\Leftrightarrow$ $\vec{x}$, $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ sind in $\mathbb{R}^4$ **linear abhängig**

$\Leftrightarrow \det(\vec{x}, \vec{p}, \vec{q}, \vec{r}) = 0$

Determinantenentwicklung nach 1.Spalte (Streichen der 1.Spalte und der i.Zeile) $a_i := (-1)^i \cdot \det \begin{pmatrix} p_0 & q_0 & r_0 \\ . & . & . \\ \cancel{p_i} & \cancel{q_i} & \cancel{r_i} \\ . & . & . \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{pmatrix}$.

$\Rightarrow \varepsilon : \; x_0 \cdot a_0 + x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 + x_3 \cdot a_3 = 0.$

$\Leftrightarrow \varepsilon : \vec{a}^T \vec{x} = 0$ mit $\vec{a} \in \mathbb{R}^4 \backslash \{\vec{o}\}$. **(*)**

(*) ist die (homogene) Koordinatengleichung einer Ebene ε mit den **homogenen Ebenen-Koordinaten** $\vec{a} \in \mathbb{R}^4 \backslash \{\vec{o}\}$ von ε.
Sie sind (wie die homogenen Punkt-Koordinaten) nur bis auf Vielfache $\neq 0$ bestimmt.

(Vgl. Übergang von Parameterdarstellung einer Geraden g zur Koordinatengleichung im P^2.)

Gleichung der Fernebene (FE): $x_0 = 0$.

Menge aller Fernpunkte mit $x_0 = 0$; klar

Gleichung der Ferngeraden von $\varepsilon \neq FE$:
$\vec{a}^T \vec{x} = 0 \;\wedge\; x_0 = 0$ (Schnitt von ε mit FE).

Alternativ erhält man die **homogenen Ebenen-Koordinaten** $\vec{a}$ der Ebene $\varepsilon = PQR$: $\vec{a}^T\vec{x} = \vec{x}^T\vec{a} = 0$ als Lösung $\neq \vec{o}$ des unterbestimmten LGS $\left\{ \begin{array}{l} \vec{p}^T\vec{a} = 0 \\ \vec{q}^T\vec{a} = 0 \\ \vec{r}^T\vec{a} = 0 \end{array} \right\}$.

Transformation:
Homogene Koord. $\leftrightarrow$ **affine Koord.**

Die **Transformation** $x = \frac{x_1}{x_0}, y = \frac{x_2}{x_0}, z = \frac{x_3}{x_0}$ liefert aus der Gleichung von $\varepsilon (\neq FE)$ in **homogenen Koordinaten**:

$\varepsilon : a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ (homog. GL)

durch Division mit x_0 die Gleichung von $\varepsilon (\neq FE)$ in **affinen Koordinaten**:

$\varepsilon : a_0 + a_1x + a_2y + a_3z = 0$ (affine Gl).

umgekehrt Einsetzen der TF und Multiplikation mit x_0

(c) Geraden im P^3

(1) als Verbindungsgeraden zweier Punkte $g = P(\vec{p})Q(\vec{q}) : \vec{x} = u\,\vec{p} + v\,\vec{q},\ u, v \in \mathbb{R}$, $(u, v) \neq (0, 0)$ in Parameterdarstellung.

(2) als Schnittgerade zweier Ebenen $g = \varepsilon \cap \delta : \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon : \vec{a}^T\vec{x} = 0 \\ \delta : \vec{b}^T\vec{x} = 0 \end{array} \right\}$, d.h. als Lösung $\vec{x} \neq \vec{o}$ eines homogenen LGS.

(d) Dualität Punkt/Ebene

Betrachte die Ebenengleichung einer Ebene $\varepsilon \subset P^3$ in homogenen Koordinaten
$\varepsilon : \vec{a}^T\vec{x} = a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$

(*) ist offenbar symmetrisch in $\vec{a}$ und $\vec{x}$.

Für festes $\left\{ \begin{matrix} \vec{a} \\ \vec{x} \end{matrix} \right\}$ ist (*) die Gleichung für die Menge aller $\left\{ \begin{matrix} \text{Punkte in einer Ebene} \\ \text{Ebenen durch einen Punkt} \end{matrix} \right\}$.

$\left\{ \begin{matrix} \vec{x} \\ \vec{a} \end{matrix} \right\}$ $\begin{matrix} \text{ist homogener} \\ \text{Koordinatenvektor} \end{matrix}$ $\left\{ \begin{matrix} \text{eines Punktes} \\ \text{einer Ebene} \end{matrix} \right\}$.

Bijektive Beziehungen:

Punkte eines P^3
$\leftrightarrow$ homogene Koordinatenvektoren im $\mathbb{R}^4$
$\leftrightarrow$ Ebenen eines P^3

Die Menge der Ebenen eines dreidimensionalen projektiv abgeschlossenen euklidischen Raumes P^3 bildet selbst einen dreidimensionalen projektiv abgeschlossenen euklidischen Raum, den zu P^3 **dualen Raum** $\hat{P}^3$.

Siehe: Figur-4-1-2-DualitaetsprinzipRaum

Nebenrechnung zu Figur-4-1-2-DualitaetsprinzipRaum:

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$ sind so gewählt, dass $\begin{array}{ll} \vec{a}^T\vec{d}=0, & \vec{a}^T\vec{e}=0 \\ \vec{b}^T\vec{d}=0, & \vec{b}^T\vec{e}=0 \end{array}$, d.h. die Punkte D, E in ε_a und in ε_b liegen $\Rightarrow \varepsilon_a \cap \varepsilon_b = h = DE$,

die Punkte A, B in ε_d und in ε_e liegen $\Rightarrow \varepsilon_d \cap \varepsilon_e = g = AB$.

$C(\vec{c}) \in g \Leftrightarrow \vec{c} = u\vec{a} + v\vec{b},\ u, v \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \vec{c}^T\vec{d} = u\vec{a}^T\vec{d} + v\vec{b}^T\vec{d} = 0 \\ \vec{c}^T\vec{e} = u\vec{a}^T\vec{e} + v\vec{b}^T\vec{e} = 0 \end{array}$

d.h. die Punkte D, E und damit $h = DE$ liegen in ε_c.

Umgekehrt liegt C in ε_d und in ε_e, also auf $g = \varepsilon_d \cap \varepsilon_e$.

Analog zeigt man $F \in h \ \Rightarrow\ A, B$ und $g = AB$ liegen in ε_f.

Sind $\vec{a}$, $\vec{b}$ homogene Koordinatenvektoren zweier Ebenen. Dann ist $\begin{array}{l} \varepsilon_a :\ \vec{a}^T\vec{x} = 0 \\ \varepsilon_b :\ \vec{b}^T\vec{x} = 0 \end{array}$ ein **LGS** für die Punkte $X(\vec{x})$ deren Schnittgerade $g = \varepsilon_a \cap \varepsilon_b$.

Sind $\vec{x}$, $\vec{y}$ homogene Koordinatenvektoren zweier Punkte. Dann ist $\begin{array}{l} \varepsilon_a :\ \vec{a}^T\vec{x} = 0 \\ \varepsilon_a :\ \vec{a}^T\vec{y} = 0 \end{array}$ ein **LGS** für alle Ebenen ε_a durch deren Vebindungsgerade $g = XY$.

Dualitätsprinzip der räumlichen projektiven Geometrie:

Ist A eine allgemeingültige Aussage in P^3, in der Punkte und Ebenen (und Geraden) sowie Verbinden und Schneiden und keine weiteren Operationen vorkommen, so erhält man aus A eine dazu duale Aussage $\widehat{A}$, inden man ersetzt:

A	$\hat{A}$
Punkt	Ebene
Gerade	Gerade
Ebene	Punkt
verbinden von Punkten	schneiden von Ebenen
schneiden von Ebenen	verbinden von Punkten

Beachte dabei die Inzidenzen:
Punkt $P(\vec{p}) \in$ Ebene $\varepsilon :\ \vec{a}^T\vec{x} = 0$ in P^3
($\Leftrightarrow \vec{a}^T\vec{p} = \vec{p}^T\vec{a} = 0 \Leftrightarrow$) bzw. dual zu
Punkt $A(\vec{a}) \in$ Ebene $\pi :\ \vec{p}^T\vec{x} = 0$ in $\hat{P}^3$.

Kollineare Punkte auf einer Geraden g sind dual zu kollinearen Ebenen durch die zu g duale Gerade $\hat{g}$.

$\hat{A}$ muss nicht eigens bewiesen werden.

4.1.3 Geometrische Deutung der Einbettung des P^2 im $\mathbb{R}^3$ liefert ein weiteres Modell für eine projektiv abgeschlossene euklidische Ebene P^2.

in P^2	im Modell (im $\mathbb{R}^3$)
Punkt	Gerade durch $O(0,0,0)$
Fernpunkt	Gerade durch O in der Ebene $x_0 = 0$
eigentlicher Punkt	sonstige Gerade durch O
Gerade	Ebene durch O
Ferngerade	Ebene $x_0 = 0$
eigentliche Gerade	Ebene durch O verschieden von $x_0 = 0$

und einen **Ausblick auf Kegelschnitte** im P^2, vgl. Figur-4-1-3-Modell

Kann übersprungen werden.

Betrachte im $\mathbb{R}^3$ den Schnitt eines (im allgemeinen schiefen) Kreiskegel mit Spitze in O mit der Ebene $x_0 = 1$:

Kreis	Menge der Erzeugenden eines Kreiskegels mit Kreis in Ebene $x_0 = 1$
Ellipse	Menge der Erzeugenden eines allgem. Kreiskegels
Hyperbel	selbe Beschreibung
Parabel	selbe Beschreibung

Fallunterscheidung nach Schnitt des Kegels mit der Ebene $x_0 = 0$. Hat dieser:

$$\left\{\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}\right\} \text{Erzeugende} \ldots \left\{\begin{array}{c} \text{Ellipse/Kreis} \\ \text{Parabel} \\ \text{Hyperbel} \end{array}\right\}.$$