Geometrie LB Übungen Blatt 12

Notiztitel 16.12.2014

T28. $\vec{x}(u,v) = \begin{pmatrix} u\cos v \\ u\sin v \\ v-u \end{pmatrix}, \ (u,v) \in \mathbb{R}^2$

a) u-Linie $(v = v_0 = \text{const})$: $\vec{x}(u,v_0) =$

Gerade durch $(0,0,v_0)$ auf der z-Achse

Aufpunkt Richtung

v-Linie $(u = u_0 = \text{const})$: $\vec{x}(u_0,v) =$

Schraublinie um z-Achse Schraubradius u_0 Ganghöhe $h = 2\pi$.

Verschiebung

$\Rightarrow \Phi$ ist Schraubfläche mit geradlinigen Erzeugenden.

b) $\vec{x}(u,v)$ regulär $\Leftrightarrow$ $\vec{x}_u(u,v)$ und $\vec{x}_v(u,v)$ sind linear unabhängig

$\Leftrightarrow \vec{x}_u \times \vec{x}_v \neq \vec{0} \Leftrightarrow (\vec{x}_u \times \vec{x}_v)^2 \neq 0$.

$\vec{x}_u =$, $\vec{x}_v =$ $\Rightarrow \vec{x}_u \times \vec{x}_v =$

spannen Tgt.ebene auf Richtung der Normalen.

1. Weg: $\lambda \vec{x}_u + \mu \vec{x}_v = \vec{0} \overset{\text{3.Komp.}}{\Rightarrow} \mu = \lambda \wedge \underbrace{\begin{pmatrix} \cos v & -\sin v \\ \sin v & \cos v \end{pmatrix}}_{\det(\cdot\cdot) = 1 \neq 0} \begin{pmatrix} \lambda \\ u\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = \mu = 0$ ✓

1. und 2. Komp.

2. Weg: $\vec{x}_u \times \vec{x}_v \neq \vec{0}$, da 3. Komp. $= 0 \Leftrightarrow u = 0$ aber $\sin v$ und $\cos v$ keine gemeinsamen Nullstelle haben. ✓

3. Weg: $(\vec{x}_u \times \vec{x}_v)^2 = \vec{x}_u^{\,2} \cdot \vec{x}_v^{\,2} - (\vec{x}_u \cdot \vec{x}_v)^2 = g_{11} g_{22} - g_{12}^2 = \det \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix}$

Lagrange Identität.

metrische Fundamentalgrößen

$g_{11} = \vec{x}_u^{\,2} =$

$g_{12} = \vec{x}_u \vec{x}_v =$

$g_{22} = \vec{x}_v^{\,2} =$

$\Rightarrow \vec{n}(u,v) = \dfrac{\vec{x}_u \times \vec{x}_v}{|\vec{x}_u \times \vec{x}_v|} =$.

Normaleneinheitsvektor.

c) $\vec{a} = a^1 \vec{x}_u + a^2 \vec{x}_v$

$\vec{b} = b^1 \vec{x}_u + b^2 \vec{x}_v$

$\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = (a^1 a^2) \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \end{pmatrix} = (a^1 a^2) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & u^2+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \end{pmatrix}$

regelt Metrik in der Tangentenebene

d) $\vec{x}_u$ und $\vec{x}_v$ sind Tgtvektoren an Parameterlinien im Punkt $\vec{x}(u_0, v_0)$

$\Rightarrow \cos\sphericalangle(\vec{x}_u, \vec{x}_v) = \dfrac{\vec{x}_u \cdot \vec{x}_v}{|\vec{x}_u|\cdot|\vec{x}_v|} = \dfrac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{22}}} =$

$\Leftrightarrow$ schneidet alle u-Linien unter 135°

Schraubachse ! geradlinige Erzeugende

e) Flächenkurve $\vec{y}(t) := \vec{x}(u(t), v(t)) \Rightarrow$

Kettenregel Tgte an Flächenkurve

Tgte an u-Linie ist $\vec{x}_u$ $\Rightarrow \sphericalangle(\dot{\vec{y}}(t), \vec{x}_u) = 90°$ im Punkt $(u(t), v(t))$

$\Leftrightarrow$

Wähle o.E. $\dot{u} = 1$ (d.h. $u(t) = t + c_1$) $\Rightarrow \dot{v} = 2$ (d.h. $v(t) = 2t + c_2$)

$\Leftrightarrow$ und mit Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ (Orthogonaltrajektorie der geradlinigen Erzeugenden)

f) $\vec{x}(u,v)$ mit $(u,v) \in \mathcal{U} =]0,2[\times]0,\pi[$ ist einfach $\Leftrightarrow$ $\vec{x}(u,v)$ injektiv

Quadratsumme der 1. und 2. Komp.

$$\vec{x}(u_1,v_1) = \vec{x}(u_2,v_2) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u_1\cos v_1 \\ u_1 \sin v_1 \\ v_1 - u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2\cos v_2 \\ u_2 \sin v_2 \\ v_2 - u_2 \end{pmatrix} \Big\} \Rightarrow$$

$$A(\phi) = \iint_{\mathcal{U}} |\vec{x}_u \times \vec{x}_v| \, du\, dv = \iint_{\mathcal{U}} \sqrt{\det(g_{ij})}\, du\, dv = \int_{v=0}^{\pi}\left(\int_{u=0}^{2}\sqrt{1+2u^2}\,du\right)dv =$$

Rechtecksbereich !

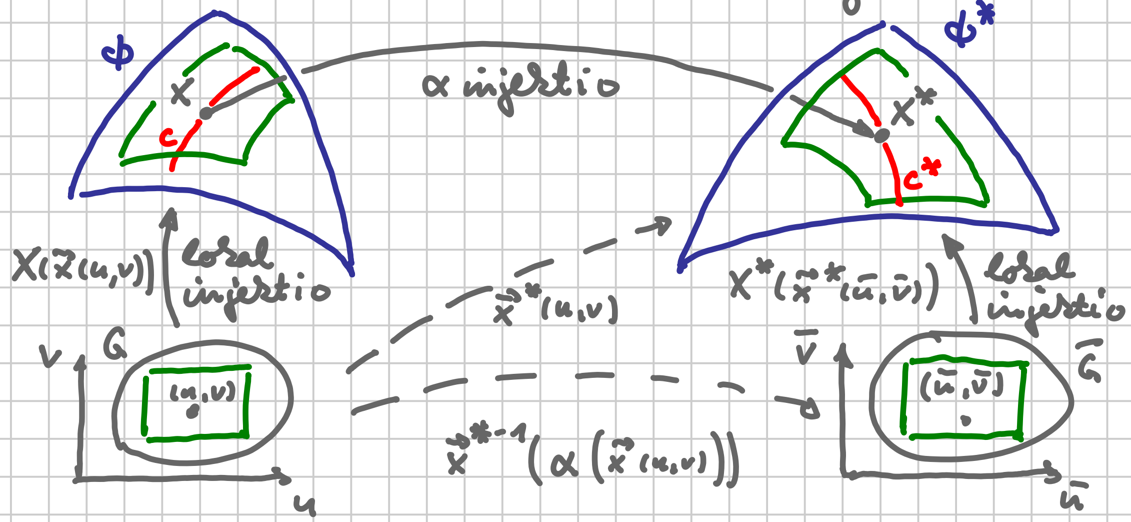
$$= \int_{u=0}^{2}\left(\int_{v=0}^{\pi}\sqrt{1+2u^2}\,dv\right)du = \int_0^2 \pi\cdot\sqrt{1+2u^2}\,du =$$

Fubini

$$= \pi\cdot\left(\tfrac{1}{2}u\sqrt{1+2u^2} + \tfrac{1}{4}\sqrt{2}\,\operatorname{arsinh}(\sqrt{2}u)\right)\Big|_{u=0}^{2} = \underline{\pi\left(3 + \tfrac{1}{4}\sqrt{2}\,\operatorname{arsinh}(2\sqrt{2})\right)}$$

<u>Anmerkung</u>: ϕ hat für $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\times \mathbb{R}$ längs $u = \frac{\pi}{2}$ eine Selbstdurchdringung (scharfe Kante) $\rightarrow$ <u>Korkenzieher</u> !

Zur lokalen Flächenabbildung



$\vec{x}^{*-1}(\alpha(\vec{x}(u,v)))$ bildet lokal G injektiv auf $\bar{G}$ ab und gibt die Möglichkeit für einen Parameterwechsel für Φ^*: $\vec{x}^*(u,v) = \alpha(\vec{x}(u,v))$

Damit sind Φ und Φ^* genauer die durch die Flächenabbildung α aufeinander bezogenen Punkte X und X^* auf dieselben Parameter (u,v) bezogen.

Seien nun o.E. Φ und Φ^* auf gleiche Parameter bezogen.

$g_{11} = \vec{x}_u^{\,2}$, $g_{12} = \vec{x}_u \vec{x}_v$, $g_{22} = \vec{x}_v^{\,2}$ und $g^*_{11} = \vec{x}_u^{*2}$, $g^*_{12} = \vec{x}^*_u \vec{x}^*_v$, $g^*_{22} = \vec{x}_v^{*2}$

Dann gilt:

1) $g_{ij}(u,v) = g^*_{ij}(u,v)$ $\left(s = \int \sqrt{g_{11}\dot{u}^2 + 2g_{12}\dot{u}\dot{v} + g_{22}\dot{v}^2}\,dt \right) \Rightarrow \alpha$ ist isometrisch

Bogenlänge von c und c^* gleich!

2) $g_{ij}(u,v) = \overset{\neq 0}{\lambda(u,v)}\, g^*_{ij}(u,v)$ $\left(\cos\sphericalangle(\dot{\vec{x}},\dot{\vec{y}}) = \dfrac{g_{11}\dot{u}\dot{\bar{u}} + g_{12}\dot{u}\dot{\bar{v}} + g_{12}\dot{\bar{u}}\dot{v} + g_{22}\dot{v}\dot{\bar{v}}}{\sqrt{g_{11}\dot{u}^2 + 2g_{12}\dot{u}\dot{v} + g_{22}\dot{v}^2}\sqrt{g_{11}\dot{\bar{u}}^2 + 2g_{12}\dot{\bar{u}}\dot{\bar{v}} + g_{22}\dot{\bar{v}}^2}} \right)$

Winkel zweier Flächenkurven c und $\bar{c}$ bzw. c^* und $\bar{c}^*$ gleich!

$\vec{x}(t) = \vec{x}(u(t), v(t))$
$\vec{y}(t) = \vec{y}(\bar{u}(t), \bar{v}(t))$

$\Rightarrow \alpha$ ist winkeltreu (konform)

3) $g(u,v) = g^*(u,v)$ $\left(O = \iint_G \sqrt{g}\,du\,dv \right) \Rightarrow \alpha$ ist flächentreu

Oberfläche von $\Phi|_G$ und $\Phi^*|_G$ gleich!

Die Umkehrung dieser Aussagen gelten ebenfalls!
Zum Beweis sind jedoch weitere Überlegungen nötig!

T29. Raumkurve $c: \vec{y}(s)$, $s \in I$ (s Bogenlänge von c, d.h. $|\vec{y}'(s)| = 1$)

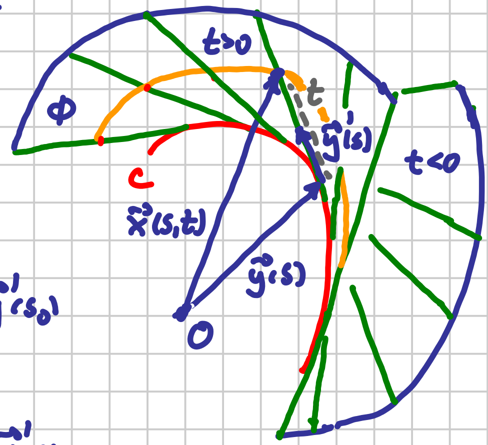
Tangentenfläche Φ: $\vec{x}(s,t) = \vec{y}(s) + t\,\vec{y}'(s)$, $s \in I$, $t \in J \subset \mathbb{R}$

a) Φ regulär $\Leftrightarrow \{\vec{x}_s, \vec{x}_t\}$ lin. unabhängig $\Leftrightarrow \vec{x}_s \times \vec{x}_t \neq \vec{0}$

(Voraussetzung c W-punktfrei $\Rightarrow \{\vec{y}', \vec{y}''\}$ lin unabh. $\Rightarrow \vec{y}' \times \vec{y}'' \neq \vec{0}$)

$\Rightarrow \Phi$ regulär für $J \subset \mathbb{R}^+$ oder $J \subset \mathbb{R}^-$

Für $t = 0$ (d.h. die Punkte von c) ist die Tangentenebene von Φ nicht erklärt. c heißt Gratlinie von Φ



b) t-Linien (s = const) $\vec{x}(s_0, t) = \vec{y}(s_0) + t\,\vec{y}'(s_0)$

s-Linien (t = const) $\vec{x}(s, t_0) = \vec{y}(s) + t_0\,\vec{y}'(s)$

Wegen $|\vec{y}'(s)| = 1 \ \forall s$ sind s-Linien Linien konstanten, auf den Tangenten von c abgetragenen Abstands.

c) (nicht normierter) Normalenvektor von Φ: $\vec{n}(s,t) = \vec{x}_s \times \vec{x}_t$

$\Rightarrow$ längs der Erzeugenden $s = s_0 = \text{const}$ von Φ ändert sich die Richtung des Normalenvektors $\vec{n}$ nicht, nur die Länge von $\vec{n}$.

Außerdem enthält jede Tangentenebene von Φ längs der Erzeugenden $s = s_0 = \text{const}$ diese Erzeugende $\vec{x}(s_0, t) \Rightarrow$ Behauptung.

d) $g_{11} =$

$(\vec{y}'(s))^2 = 1 \ \forall s \overset{d/ds}{\Rightarrow} 2\vec{y}'(s)\vec{y}''(s) = 0 \ \forall s$ $\qquad \kappa(s) = |\vec{y}''(s)|$

$g_{12} =$

$g_{22} =$ $\qquad (\Rightarrow g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = t^2\kappa^2(s) \neq 0$ für $t \neq 0$)

e) Nach Vorlesung ist die Abbildung zweier Flächen aufeinander (mittels Zuordnung durch gleiche Parameter) isometrisch, wenn in zugeordneten Punkten die metrischen Fundamentalgrößen übereinstimmen.

Aus d folgt: Zwei Tangentenflächen Φ_1, Φ_2, deren Gratlinien $c_1: \vec{y}_1(s)$ und $c_2: \vec{y}_2(s)$ (jeweils auf ihre Bogenlänge s bezogen) in zugeordneten Punkten die selbe Krümmung haben, sind zueinander isometrisch.

Nach dem Hauptsatz der Kurventheorie gibt es bis auf Bewegungen genau eine <u>ebene</u> Kurve $\tilde{c}$ mit der Krümmung $\kappa(s)$ von c. Die <u>ebene</u> Tangentenfläche $\tilde{\Phi}$ von $\tilde{c}$ ist (nach d) isometrisch zur Tangentenfläche Φ von c.

Zusatz!

Parameterdarstellung von $\tilde{c}$ in der xy-Ebene:

$$\tilde{c}: \vec{\tilde{y}}(s) = \left(\int_0^s \cos\left(\int_0^v \kappa(u)\,du \right) dv,\ \int_0^s \sin\left(\int_0^v \kappa(u)\,du \right) dv,\ 0 \right)^T,\ s \in I$$

<u>Beweis durch Nachrechnen</u>:

Beachtet man $\frac{d}{ds} \int_0^s f(v)\,dv = f(s)$, so erhält man

$$\vec{\tilde{y}}'(s) = \frac{d}{ds} \vec{\tilde{y}}(s) = \left(\cos\left(\int_0^s \kappa(u)\,du \right), \sin\left(\int_0^s \kappa(u)\,du \right), 0 \right)^T \text{ und } |\vec{\tilde{y}}'(s)| = 1$$

$\Rightarrow$ Bogenlänge s von c ist auch Bogenlänge von $\tilde{c}$!

$$\vec{\tilde{y}}''(s) = \left(-\kappa(s) \sin\left(\int_0^s \kappa(u)\,du \right), \kappa(s) \cos\left(\int_0^s \kappa(u)\,du \right), 0 \right)^T \Rightarrow \tilde{\kappa}(s) = |\vec{\tilde{y}}''(s)| = \kappa(s)$$

<u>Beispiel:</u> Die Tangentenflächen der Schraublinien c_a:

$$\vec{y}_a(s) = \begin{pmatrix} \frac{\kappa}{a^2} \cos(as) \\ \frac{\kappa}{a^2} \sin(as) \\ \frac{\sqrt{a^2-\kappa^2}}{a} s \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{y}_a'(s) = \begin{pmatrix} -\frac{\kappa}{a} \sin(as) \\ \frac{\kappa}{a} \cos(as) \\ \frac{\sqrt{a^2-\kappa^2}}{a} \end{pmatrix},\ \vec{y}_a''(s) = \begin{pmatrix} -\kappa \cos(as) \\ -\kappa \sin(as) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow |\vec{y}_a''| = \kappa = \text{const}$, sind für alle $a \geq \kappa$ zueinander isometrisch bzw. alle isometrisch zur <u>ebenen</u> Tangentenfläche des Kreises c_κ mit Radius $\frac{1}{\kappa}$, vgl. Figur TangentenFlaeche.cdy!